621.39
П52

Р. И. ПОЛОННИКОВ
В. И. КОСТЮК
В. Е. КРАСКЕВИЧ

МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

068437

621.39
П 52

Р. И. ПОЛОННИКОВ,
В. И. КОСТЮК,
В. Е. КРАСКЕВИЧ

МАТРИЧНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

068437

621.39

Киев
«Техніка»
1977

К
-2013
ПЕРЕВІРЕНО

6Ф0.1
П52

УДК 621.391

Матричные методы обработки сигналов. Полонников Р. И., Костюк В. И., Краскевич В. Е. Киев, «Техніка», 1977. 136 с.

Изложены новые матричные методы обработки сигналов и показано их применение при комплексной микроминиатюризации радиоэлектронной аппаратуры. В основу этих методов положен обобщенный спектральный анализ, предоставляющий исследователям широкий класс систем ортонормированных базисных функций для получения спектров сигнала. Показано, что наиболее удобными в практической реализации при построении радиоэлектронной аппаратуры на интегральных микросхемах являются функции Уолша и Хаара. Рассмотрены устройства цифровых фильтров и обучаемых распознающих устройств для систем с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Рассчитана на инженеров, работающих в области технической кибернетики, радиоэлектроники и систем автоматического управления, и может быть полезна студентам соответствующих специальностей.

Табл. 7. Ил. 32. Список лит.: 31 назв.

Рецензент д-р техн. наук *Р. М. Юсупов*

Редакция литературы по энергетике, электронике, кибернетике и связи

Зав. редакцией *З. В. Божко*

П $\frac{30401\text{-}105}{М202\,(04)\text{-}77}$ 46-77

© Издательство «Техніка», 1977

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основным направлением развития радиоаппаратостроения является комплексная микроминиатюризация, предполагающая широкое, комплексное внедрение методов и средств микроэлектроники, или интегральной электроники, в развитие технической базы радио- и электронного приборостроения, в схемо- и системотехнику. С внедрением этих методов и средств открываются новые, чрезвычайно широкие возможности по «крупноблочному строительству» аппаратуры самого разнообразного назначения и, что самое существенное, увеличивающейся функциональной сложности.

С появлением микроэлектроники стало возможным реализовать практически большое разнообразие схем с переменными параметрами, что в значительной мере способствовало повышению интереса к другим системам полных и ортогональных базисных функций. Наибольшее предпочтение, однако, отдается сейчас полным прямоугольным, ортонормированным системам базисных функций и в первую очередь функциям Уолша и Хаара. Обобщенный спектральный анализ на основе использования этих и некоторых других функций является в настоящее время математическим аппаратом наиболее адекватным как современной элементной базе микроэлектроники, так и основным тенденциям ее развития. Использование в качестве

базисной системы функций Уолша, принимающих на всем интервале только два значения +1 и —1, избавляет от необходимости реализации операций умножения функций и позволяет синтезировать цифровые фильтры, всевозможные спектральные анализаторы и другие устройства обработки сигналов без применения индуктивностей, тем самым исключая один из наиболее сложных в микроэлектронике элементов. Весьма интересные перспективы, связанные также с применением функций Уолша, открываются и при построении фазированных антенных решеток (ФАР), при синтезе оптимальных сигналов, при разработке обучаемых распознающих систем, при решении целого ряда задач оптимизации и численного анализа.

Данная книга является попыткой систематизированного, хотя и краткого, изложения последних достижений в области обобщенного спектрального анализа и матричных методов применительно к решению задач обработки сигналов. При ее написании приходилось учитывать то обстоятельство, что методы обобщенного спектрального анализа, применение функций Уолша и быстрого преобразования Адамара еще мало знакомы широким кругам инженеров-разработчиков и поэтому нуждаются в подробном разъяснении и популяризации.

Глава 1 написана совместно Р. И. Полонниковым, В. И. Костюком, В. Е. Краскевичем; глава 2 — Р. И. Полонниковым; глава 3 — совместно В. И. Костюком, В. Е. Краскевичем и Р. И. Полонниковым; глава 4 — Р. И. Полонниковым.

Замечания и отзывы просьба направлять по адресу: *252 601, Киев, 1, ГСП, Пушкинская, 28, издательство «Техніка».*

Глава 1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

1. ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИИ УОЛША И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АДАМАРА

Появление новых экономичных методов спектрального анализа позволило ускорить процесс получения спектра в сотни и даже тысячи раз без увеличения быстродействия ЭВМ. Решающая роль здесь принадлежит методам быстрого преобразования Фурье, Адамара и Хаара.

Представление сигнала в виде суммы синусоидальных и косинусоидальных составляющих не является единственно возможным. В наиболее общем виде, оставаясь в рамках линейных представлений, любой сигнал можно рассматривать как совокупность элементарных функций (сигналов), взятых с некоторыми весами. Совокупность элементарных функций обычно называют системой базисных функций, а представление сигнала в виде суммы — разложением сигнала по системе базисных функций. Набор весовых коэффициентов называют спектром сигнала. Используя эти представления, удобно рассматривать сигнал как вектор в многомерном пространстве. Тогда система базисных функций образует в этом пространстве систему координат (координатных функций), а спектр является проекцией вектора-сигнала на соответствующие оси координат.

Рассмотрим преобразование Адамара и представление сигнала с использованием базисных функций Уолша.

Дискретные функции Уолша (ДФУ) образуются равномерной выборкой непрерывных функций Уолша. Пронумеруем моменты выборки $i = \sum\limits_{k=0}^{N=1} i_k 2^k$ при общем количестве моментов выборки и дискретных функций Уолша $N = 2^n$. Обозначим ДФУ:

$$\left.\begin{array}{l} w_j(i,\ N),\ \mathrm{wal}(i,\ N); \\ \mathrm{cal}(j,\ i,\ N),\ \mathrm{sal}(j,\ i,\ N); \\ h_j(i,\ N). \end{array}\right\}$$

Для описания свойств дискретной функции Уолша примем следующую форму записи:

$$w_j(i,\ N) = w_j(\tau/T_0)\,\delta(t - i\tau).$$

К основным свойствам ДФУ относятся:

ортогональность

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_j(i,\ N)\, w_k(i,\ N) = 2^n \delta_{ik},$$

где δ_{ik} — символ Кронекера;

полнота

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_i(i,\ N)\, w_j(k,\ N) = 2^n \delta_{ik};$$

симметрия

$$w_j(i,\ N) = w_i(j,\ N);$$

мультипликативность

$$w_j(i,\ N)\, w_k(i,\ N) = w_{j \oplus k}(i,\ N).$$

Прямое и обратное преобразования Адамара определяются соответственно следующим образом:

$$f^*(j) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(i,\ N)\, f(i);$$

$$f(i) = 2^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} w_i(i,\ N)\, f^*(j).$$

Пара преобразований обозначается

$$f^*(j) \longleftrightarrow f(i). \qquad (1.1)$$

Преобразования Адамара можно записать в матричной форме:

$$f^* = H_N f; \quad f = (1/N)\, H_N f^*,$$

где $f^* = [f^*(0), \ f^*(1), \ \ldots, \ f^*(N-1)]^T$ и $f = [f(0), f(1), \ldots, f(N-1)]^T$ — векторы-столбцы; H_N — матрица Адамара порядка N, определяемая из условия $H_N H_N^T = NI$.

Строки матрицы H соответствуют дискретным функциям Уолша и принимают значения ± 1. В соответствии с различными формами записи функций Уолша строки матрицы H размера $N \times N$ могут быть упорядочены согласно с номерами функций: H_w — $w_j(i, N)$; H_N — $h_j(i, N)$ — собственно матрица Адамара; N_{wal} — $\mathrm{wal}(j, i, N)$.

Для $N = 8$ $(n = 3)$

$$H_w = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$H_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$H_{\text{wal}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Перечисленные ниже основные свойства преобразования Адамара справедливы независимо от способа упорядочения матрицы H.

1. Преобразование Адамара $f(i)$ отличается от функции $f(i \oplus k)$ только множителем, равным значению ДФУ $w_j(k, N)$ (теорема сдвига):

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_j(i, N) D_k \{f(i)\} = w_j(k, N) f^*(j),$$

где $D_k \{f(i)\} = f(i \oplus k)$ — двоичный оператор сдвига.

2. Преобразование Адамара от диодной (логической) свертки двух дискретных функций $f(i)$ и $g(i)$:

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_j(i, N) \sum_{k=0}^{N-1} f(i \oplus k) g(k) = f^*(j) g^*(j),$$

т. е. преобразование Адамара от двоичной свертки двух функций равно произведению их дискретных преобразований (теорема свертки).

3. Если $f(i)$ и $g(i)$ — произвольные дискретные функции и

$$f(i) \leftarrow\rightarrow f^*(k); \quad g(i) \leftarrow\rightarrow g^*(k),$$

то $$\sum_{i=1}^{N-1} f(i) g(i) = 2^{-n} \sum_{k=1}^{N-1} f^*(k) g^*(k)$$

или в матричном виде

$$f^T g = 2^{-n} f^{*T} g^*$$

(теорема Парсеваля).

4. Сложение вектора с постоянной:

$$f(i) + a \leftarrow\rightarrow f^*(l) + Na\delta(l).$$

5. Нулевая составляющая вектора f^* с точностью до множителя 2^{-n} есть среднее составляющих вектора f:

$$f^*(0) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i).$$

Среднее суммы составляющих вектора f^* дает нулевую составляющую вектора f:

$$f(0) = 2^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} f^*(j).$$

6. Свойство симметрии. Если $f \leftarrow\rightarrow f^*$, то $\frac{f^*}{N} \leftarrow\rightarrow f$.

2. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ АДАМАРА

Быстрое преобразование Адамара (БПА) можно получить разложением матрицы H_N $(N - 2^n)$ в произведение матриц Гуда G_r [28] с небольшим количеством отличных от нуля членов $H_N = \prod_{r=0}^{n-1} G_r$. Поэтому вычисление спектра f^* можно представить следующим образом:

$$f^* = G_{n-1} G_{n-2} \ldots G_1 G_0 f$$

или в виде последовательности преобразований

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= G_0 f; \\ f_2 &= G_1 f_1; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f^* = f_n &= G_{n-1} f_{n-1}. \end{aligned}\right\}$$

Матрица G_r, представленная в виде блочно-диагональной матрицы

$$G_r = \begin{bmatrix} A(r) & & & \\ & A(r) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(r) \end{bmatrix}, \qquad (1.2)$$

содержит 2^{n-r-1} отличных от нуля блоков ($r = 1, 2, \ldots, n-1$). Подматрицы $A(r)$ находятся как Кронекерово произведение матриц:

$$A(r) = H_2 \otimes I_2. \qquad (1.3)$$

Для $n = 3$ и $N = 8$ на основании выражений (1.2) и (1.3)

$$A(0) = H_2; \quad A(1) = H_2 \otimes I_2; \quad A(2) = H_2 \otimes I_4;$$

$$G_0(8) = \begin{vmatrix} H_2 & & & \\ & H_2 & & \\ & & H_2 & \\ & & & H_2 \end{vmatrix};$$

$$G_1(8) = \begin{vmatrix} \begin{matrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{matrix} \end{vmatrix};$$

$$G_2(8) = \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix},$$

где $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Граф БПА, соответствующий этому разложению, показан на рис. 1. Ввиду симметричности матриц Адамара

$$H_N = H_N^T = G_{n-1}G_{n-2} \ldots G_1G_0 = G_0G_1 \ldots G_{n-1}. \quad (1.4)$$

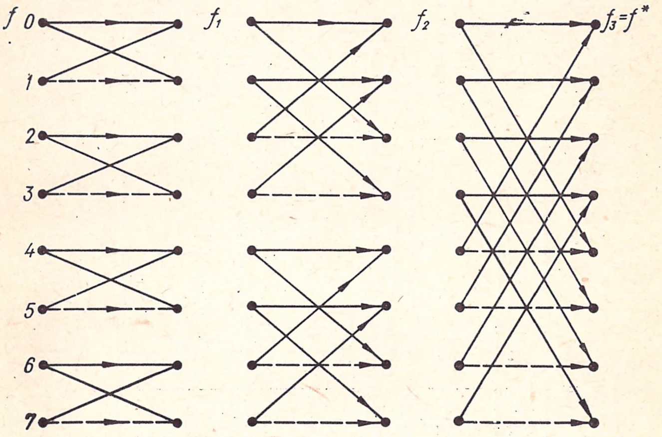


Рис. 1. Граф быстрого преобразования Адамара.

Из выражения (1.4), представляющего собой одну из возможных модификаций матриц Адамара, следует, что БПА имеет два алгоритма, соответствующих прямой и обратной последовательности сомножителей в произведении матриц G_r. Другой подход к синтезу БПА состоит в разбиении H_N на блоки с последующей

факторизацией:

$$H_N =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & \multicolumn{2}{c|}{-1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} & 1 & 1 & \multicolumn{2}{c}{-1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \\
1 & -1 & & & 1 & -1 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & \multicolumn{2}{c|}{-1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} & \multicolumn{2}{c}{-1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \\
1 & -1 & 1 & -1 & & & & \\
\hline
1 & 1 & \multicolumn{2}{c|}{-1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} & \multicolumn{2}{c|}{-1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} & 1 & 1 \\
1 & -1 & & & & & 1 & -1
\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc}
H_2 & H_2 & H_2 & H_2 \\
H_2 & -H_2 & H_2 & -H_2 \\
\hline
H_2 & H_2 & \multicolumn{2}{c}{-1\begin{pmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{pmatrix}} \\
H_2 & -H_2 & &
\end{array}\right] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c}
I_4 & I_4 \\
\hline
I_4 & -I_4
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cc|cc}
H_2 & H_2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\
H_2 & -H_2 & & \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{0} & H_2 & H_2 \\
& & H_2 & -H_2
\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c}
I_4 & I_4 \\
\hline
I_4 & -I_4
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cc|cc}
I_2 & I_2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\
I_2 & -I_2 & & \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{0} & I_2 & I_2 \\
& & I_2 & -I_2
\end{array}\right] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c|c|c|c}
H_2 & & & \\
\hline
& H_2 & & \\
\hline
& & H_2 & \\
\hline
& & & H_2
\end{array}\right] = G_2 G_1 G_0.$$

Все матрицы G_r можно привести к одинаковому виду. Например, для $n = 3$ матрица Гуда

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \ldots 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1.5)$$

поэтому $H_N = G^n$.

Каждая строка матрицы Гуда содержит два отличных от нуля элемента, равных $+1$ или -1. Поэтому умножение на одну матрицу Гуда размером $2^n \times 2^n$ требует всего 2^n арифметических операций (сложение и вычитание), а из матрицы (1.5) следует, что общее число операций при нахождении спектра равно nN. Непосредственное же вычисление преобразования Адамара потребовало бы $N(N-1)$ арифметических операций. Аналогичные разложения и соответствующие им быстрые алгоритмы можно получить и для других дискретных линейных преобразований, таких как Фурье, Хаара, причем наименьшее число операций, равное $2(N-1)$, необходимо при использовании преобразования Хаара.

Рассмотрим еще одну модификацию БПА. Если

$$H_8 = H_4 \otimes H_2 = \begin{bmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix},$$

где $H_4 = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{bmatrix},$

то

$$H_8 = \left[\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix} \end{array}\right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} I_2 & I_2 & 0 & 0 \\ I_2 & -I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & I_2 \\ 0 & 0 & I_2 & -I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix}. \qquad (1.6)$$

Матрицу (1.6) можно записать в виде

$$H_8 = (H_2 \otimes I_4)(I_2 \otimes H_2 \otimes I_2)(I_4 \otimes H_2) =$$

$$= (H_4 \otimes I_2 \otimes I_2)(I_2 \otimes H_2 \otimes I_2)(I_2 \otimes I_2 \otimes H_2)$$

или в общем виде

$$H_{2^n} = (H_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2)(I_2 \otimes H_2 \otimes I_2 \otimes \cdots$$

$$\cdots \otimes I_2) \ldots (I_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes H_2), \qquad (1.7)$$

где число членов (скобок) в правой части выражения (1.7) равно n.

Введем оператор «идеальной перетасовки»

$$P = \left\{\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_{N/2} \\ X_1 \\ X_{(N+2)/2} \\ \vdots \\ X_{(N-2)/2} \\ X_{N-1} \end{bmatrix},$$

тогда

$$H_{2^n} = (CP)^n, \qquad (1.8)$$

где $C = H_2 \otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2$.

Для $n = 3$ и $N = 8$

$$G_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (1.9)$$

Пользуясь выражениями (1.8) и (1.9) находим преобразования Адамара:

$$f_1^T = [(f_0 + f_4),\ (f_0 - f_4),\ (f_1 + f_5),\ (f_1 - f_5),$$
$$(f_2 + f_6),\ (f_2 - f_6),\ (f_3 + f_7),\ (f_3 - f_7)]^T;$$

$$f^* = \begin{bmatrix} f_1 + f_4 + f_2 + f_6 + f_1 + f_5 + f_3 + f_7 \\ f_1 + f_4 + f_2 + f_6 - f_1 - f_5 - f_3 - f_7 \\ f_1 + f_4 - f_2 - f_6 + f_1 + f_5 - f_3 - f_7 \\ f_1 + f_4 - f_2 - f_6 - f_1 - f_5 + f_3 + f_7 \\ f_1 - f_4 + f_2 - f_6 + f_1 - f_5 + f_3 - f_7 \\ f_1 - f_4 + f_2 - f_6 - f_1 + f_5 - f_3 + f_7 \\ f_1 - f_4 - f_2 + f_6 + f_1 - f_5 - f_3 + f_7 \\ f_1 - f_4 - f_2 + f_6 - f_1 + f_5 + f_3 - f_7 \end{bmatrix}.$$

Известна также модификация БПА [14, 15], приводящая к спектру, инвариантному относительно циклических сдвигов вектора, зеркальных отражений, изменений масштаба и смещений. Здесь вместо операций сложения и вычитания проводятся чисто логические

операции, что более удобно при технической реализации. Так, вместо сложения используется операция И—НЕ:

$$1+1=0; \quad 0+1=1;$$

$$0+0=1; \quad 1+0=1,$$

а вместо вычитания — операции НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ:

$$1-1=0;$$

$$1-0=1;$$

$$0-0=0;$$

$$0-1=1.$$

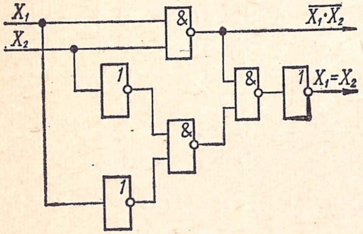


Рис. 2. Функциональная схема элементов, выполняющих операции И—НЕ и НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ.

Поэтому данное преобразование назвали логическим БПА (ЛБПА). Устройство, осуществляющее ЛБПА, просто реализуется на интегральных микросхемах и обладает большой однородностью структуры. Функциональная схема элементов, выполняющих операции И—НЕ и НЕРАВНОЗНАЧНОСТЬ, показана на рис. 2.

Структурная схема всего устройства показана на рис. 3. Число разнообразных выходных кодов после ЛБПА может быть найдено по формуле

$$N_{\text{вых}} = (N-3)\log_2 N + (N^2/4) - (5N/2) + 10,$$

где N — размерность преобразуемого входного вектора.

Свойство инвариантности ЛБПА к упоминавшимся возмущениям типа сдвига, переносов, изменения масштаба и толщины линий изображения можно продемонстрировать с помощью рис. 4, 5, 6.

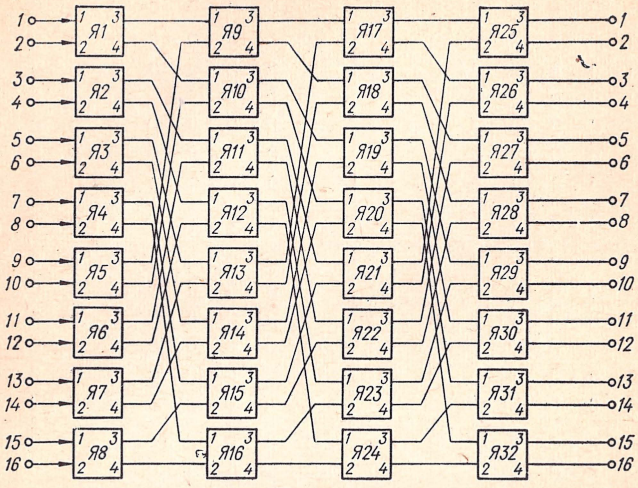


Рис. 3. Структурная схема автоустройства, реализующего логическое быстрое преобразование Адамара:
Я1 — Я32 — ячейки

3. ЛОГИЧЕСКАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ В БАЗИСЕ УОЛША

Пусть имеются выборочные функции $x(j)$ и $y(j)$ $(j = 0,1, \ldots, N-1)$ некоторых дискретных случайных процессов $X(j)$ и $Y(j)$. Логическая корреляционная функция этих двух выборочных последовательностей

$$L(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j \oplus k)\, y(j), \qquad (1.10)$$

где $k = 0,1,\ldots, (N-1)$ и $N = 2^n$; j и k — целые положительные числа, меньшие, чем $2^n - 1$.

Рассмотрим ряд таких чисел:

$$\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots, (2^n - 1)\} = Z_n. \qquad (1.11)$$

068437
Техническая библиотека ... завод

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

а

25	13	13	13	15	13	13	13	15	13	13	13	15	13	13	13
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
15	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1

б

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

25	13	13	13	15	13	13	13	15	13	13	13	15	13	13	13
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
15	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
13	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1

0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1

в

Рис. 4. Код фигуры в виде креста на входной матрице (16×16)
гический адамаров спектр (*в*) до

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

а

0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1

элементов (*а*), адамаров спектр этого изображения (*б*), ло-
и после смещения изображения.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

13	7	7	7	7	7	7	7	13	7	7	7	7	7	7	7
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
13	7	7	7	7	7	7	7	13	7	7	7	7	7	7	7
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1

б

0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1

в

Рис. 5. Код фигуры в виде креста на входной матрице (16× адамаров спектр этих изображений (*б*), логиче-

5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3	5	3	3	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1
3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1	3	1	1	1

0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1

16) элементов до и после смещения и изменения масштаба (*а*). ский адамаров спектр тех же изображений (*в*).

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

а

13	7	7	7	7	7	7	7	13	7	7	7	7	7	7	7
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
13	7	7	7	7	7	7	7	13	7	7	7	7	7	7	7
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1

б

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

52	0	28	0	28	0	28	0	28	0	28	0	28	0	28	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1

в

Рис. 6. Код фигуры в виде креста на входной матрице (16×16) ны линий (*а*), адамаров спектр этих изображений (*б*),

Каждый элемент ряда (1.11) можно представить в двоичной системе. В табл. 1 приведена матрица поразрядного сложения по модулю 2 ($j \oplus k$) для ряда $Z_4 = \{0, 1, \ldots, 15\}$. Если для какого-то определенного n матрица делится на четыре матрицы $2^{n/2} \times 2^{n/2}$, то каждая из них является симметричной относительно обеих диагоналей. Это позволяет расширять таблицу для $n > 4$. Если в выражении (1.10) $y(j) = x(j)$, то $L^{(m)}(k)$ — логическая функция автокорреляции для j-й выборки длины N, которую можно определить как математическое ожидание по ансамблю локальных автокорреляционных функций:

$$L(k) = M\{L^{(m)}(k)\}, \qquad k = 0, 1, \ldots, (N-1).$$

В частности, для $N = 4$ логическая автокорреляционная функция в матричной форме имеет вид

$$L_N = \begin{bmatrix} L(0) \\ L(1) \\ L(2) \\ L(3) \end{bmatrix} = M\left\{\frac{1}{4}\begin{bmatrix} x(0) & x(1) & x(2) & x(3) \\ x(1) & x(0) & x(3) & x(2) \\ x(2) & x(3) & x(0) & x(1) \\ x(3) & x(2) & x(1) & x(0) \end{bmatrix} \times\right.$$

0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0

элементов до и после смещения, изменения масштаба и толщи-
логический адамаров спектр тех же изображений (*в*).

$$\times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} \Bigg\}. \qquad (1.12)$$

Значения аргумента у элементов квадратной матрицы в правой части определены с помощью табл. 1 [30]. Учитывая выражение (1.12) и табл. 1, получаем логическую ковариационную матрицу, которая для $N = 4$ имеет вид

$$C_L = \sigma^2 \begin{bmatrix} l(0) & l(1) & l(2) & l(3) \\ l(1) & l(0) & l(3) & l(2) \\ l(2) & l(3) & l(0) & l(1) \\ l(3) & l(2) & l(1) & l(0) \end{bmatrix},$$

где $l(k) = L(k)/\sigma^2$; $l(0) = 1$; $L(0) = \sigma^2$.

Если имеется матричное уравнение $Y = TX$, представляющее линейное ортонормированное преобразование входного случайного вектора X в выходной

Таблица 1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

вектор Y, то ковариационная матрица выходного вектора Y

$$C_Y = TC_XT^*,$$

где C_X — ковариационная матрица X, а индекс «*» означает сопряженное транспонирование. Если T — матрица Адамара, а $C_X = C_L$, то матрица $C_Y = HC_LH^*$ является диагональной. Для $N = 4$ ее элементы

$$\lambda_{00} = N\sigma^2 \{1 + l(1) + l(2) + l(3)\};$$

$$\lambda_{11} = N\sigma^2 \{1 + l(1) - l(2) - l(3)\};$$

$$\lambda_{22} = N\sigma^2 \{1 - l(1) - l(2) + l(3)\};$$

$$\lambda_{33} = N\sigma^2 \{1 - l(1) + l(2) - l(3)\}.$$

Таким образом, в рассмотренном случае преобразование Адамара эквивалентно преобразованию Корунена — Лоэва.

Спектр плотности мощности в базисе Уолша есть преобразование Адамара для логической автокорреляционной функции [13]

$$L_N^* = P_H \leftarrow \rightarrow L_N$$

или

$$L_N^*(j) = \sum_{i=0}^{N-1} L_N(i)\, w_j(i,\ N).$$

Дискретные спектры плотности в обычном базисе тригонометрических функций (sin, cos) и в базисе Уолша для речевого сигнала исследовались в работе [30]. Из непрерывной речи (текст из пяти предложений читали мужчина и женщина) в течение 30 с были сделаны выборки на частоте 8 кГц при $N = 16$ и найдены арифметическая и логическая автокорреляционные функции, а также собственные величины ковариационной матрицы. Затем значения выборочных автокорелляционных функций взвешивались с помощью

ядер Парзена $p(k) =$

$$= \begin{cases} 1-6\,(k/(N-1))+6\,|\,k/(N-1)\,|^3 \text{ при } |k| < (N-1)/2; \\ 2-(1-|\,k/(N-1)\,|^3) \text{ при } (N-1)/2 \leqslant |\,k\,| \leqslant N-1; \\ 0 \text{ при } |\,k\,| > N-1 \end{cases}$$

для ослабления влияния коэффициентов Уолша — Фурье высших порядков. По взвешенным значениям

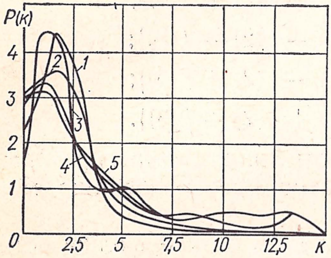


Рис. 7. Дискретный спектр плотности мощности при гармоническом (sin, cos) базисе для мужского (*1*) и женского (*2*) голосов (речь); в базисе Уолша для мужского голоса (*3*), мужского (*4*) и женского (*5*) голосов со взвешиванием по Парзену.

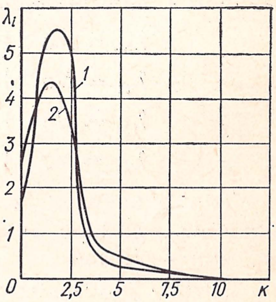


Рис. 8. Собственные величины речевой ковариационной матрицы для мужского (*1*) и женского (*2*) голосов.

автокорреляционных функций определялись дискретные спектры плотности мощности. Оказалось, что они близки к спектрам (собственным величинам) ковариационной матрицы этих процессов, что иллюстрируется рис. 7, 8.

Такая же близость обнаружена [24] и для изображений при их обработке с помощью аналогичной методики с целью последующего распознавания. Существует линейное преобразование, связывающее логическую $L(k)$ и арифметическую $R(k)$ автокорреляционные функции, а также соответствующие спектры

плотности мощности. Это преобразование можно записать в матричной форме в виде матрицы

$$T_{\text{ал}} = D_N T_N, \qquad (1.13)$$

где индекс «ал» означает переход от арифметической к логарифмической форме; D_N — диагональная матрица размерностью $N \times N$ и элементами $d(j, j) = m^{-1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, (N-1)$; $m_j = 2^{v_j - 1 + \delta(j,0)}$; v_j — число единиц в двоичном представлении j; $\delta(j, 0)$ — символ Кронекера.

В табл. 2 [30] приведены элементы m_j и v_j для обратной матрицы D_{N-1} при $N = 16$ и $n = 4$. Матрицу T_N (1.13) можно сформировать рекуррентно с помощью матрицы $S_{N/2}$, у которой все элементы — нули, не

Таблица 2

Значения j		v_j	m_j
десятичные	двоичные		
0	0 0 0 0	0	1
1	0 0 0 1	1	1
2	0 0 1 0	1	1
3	0 0 1 1	2	2
4	0 1 0 0	1	1
5	0 1 0 1	2	2
6	0 1 1 0	2	2
7	0 1 1 1	3	4
8	1 0 0 0	1	1
9	1 0 0 1	2	2
10	1 0 1 0	2	2
11	1 0 1 1	3	4
12	1 1 0 0	2	2
13	1 1 0 1	3	4
14	1 1 1 0	3	4
15	1 1 1 1	4	8

считая единиц, размещенных вправо на один элемент от элемента неглавной диагонали:

$$S_1 = 0; \quad S_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рекуррентность матрицы начинается с $T_1 = 1$

$$T_N = \begin{bmatrix} T_{N/2} & 0 \\ T_{N/2}S_{N/2} & T_{N/2} \end{bmatrix}.$$

Обратный переход от логической формы к арифметической производится с помощью матрицы

$$T_{\text{ла}} = T_{N-1} D_{N^{-1}}. \tag{1.14}$$

Для $N = 16$

$$T_N = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{vmatrix};$$

$$T_{N-1} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

$$
T_{N-1} = \begin{vmatrix}
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1
\end{vmatrix}.
$$

Арифметическую корреляционную функцию R_N находим следующим образом. Пусть имеем m-ю выборку временной функции $x^{(m)}(i)$, $i = 0, 1, \ldots, N - 1$ и $N = 2^n$, для которой спектр Адамара

$$x^{*(m)}(j) = \sum_{i=0}^{N-1} x^{(m)}(i)\, w_j(i, N).$$

Спектр плотности мощности в базисе Уолша определяется как среднее из локальных энергетических спектров Адамара:

$$P_H(j) = \frac{1}{S_0} \sum_{m=1}^{S_0} [x^{*(m)}(j)]^2.$$

Обратное преобразование Адамара, аналогичное прямому от вектора $P_H = \{P_H(0), P_H(1), \ldots, P_H(N - 1)\}^T$, дает вектор (логическую автокорреляционную функцию)

$$L_N = \begin{bmatrix} L(0) \\ L(1) \\ \vdots \\ L(N-1) \end{bmatrix} = HP_H.$$

Используя матрицу (1.14), находим $R_N = \{R(0), R(1), \ldots, R(N-1)\}^T$ — арифметическую корреляционную функцию:

$$R_N = T_{N-1} D_{N-1} L_N.$$

Применение БПА позволяет здесь сократить число операций сложения и вычитания.

4. ОРТОГОНАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ХААРА

Система функций Хаара является полной ортонормированной системой функций, определенных на промежутке [0,1]. Непрерывные функции Хаара упорядочиваются по двум индексам и определяются следующим образом:

$$\chi_n^k(t) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } t \in [(2k-2)/2^{n+1}, \quad (2k-1)/2^{n+1}]; \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } t \in [(2k-1)/2^{n+1}, \quad 2k/2^{n+1}]; \\ 0 & \text{при остальных } t, \text{ на отрезке } [0,\ 1]. \end{cases}$$

Индекс n указывает на длительность ненулевого периода функции Хаара, равного $-1/2^n$, и ее амплитуды, равной $\sqrt{2^n}$, индекс k — на местонахождение данного ненулевого периода на интервале [0,1].

Для определения дискретных функций Хаара необходимо выбрать значения непрерывных функций Хаара в равноотстоящих точках — в точках перехода через нуль функций Хаара первого (по n) отбрасываемого порядка. Полученные таким образом дискретные функции также являются полной ортогональной системой функций, определенной на выбранной ре-

шетке. Множитель $1/\sqrt{2^{n+1}}$ (где 2^{n+1} — количество точек в решетке) делает систему ортонормированной.

На рис. 9 показаны графики первых непрерывных и дискретных функций Хаара. Здесь $\{\chi_2^k\}$ — функции первого отбрасываемого порядка, нули которых определяют решетку дискретных функций Хаара, характеризующиеся следующими особенностями: они кусочно-постоянны, на значительной части интервала определения равны нулю, значение функции порядка n равно $\pm\sqrt{2^n}$ при всех k. Эти особенности дают возможность существенно сократить число арифметических операций до $2(N-1)$ при нахождении коэффициентов разложения функции в ряд Хаара с помощью перемножения вектора на матрицу.

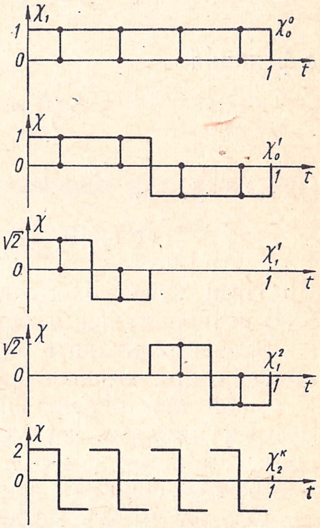


Рис. 9. Графики первых непрерывных и дискретных функций Хаара.

Такая экономия операций достигается с помощью быстрого преобразования Хаара (БПХ) в связи с тем, что большинство членов матрицы преобразования равны нулю. В результате уменьшаются затраты машинного времени, например, по сравнению с преобразованием Фурье, так как при четных n — умножение на $2^{n/2}$ — является просто сдвигом двоичного члена на $n/2$ разрядов влево.

Любую непрерывную функцию $S(t)$, удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в рав-

номерно сходящийся ряд Фурье в базисе Хаара. Так как эта система является ортонормированной, то коэффициенты этого ряда при любой функции Хаара $\chi_n^k(t)$ можно найти по формуле

$$a_n^k = \int_0^1 S(t)\,\chi_n^k(t)\,dt, \qquad (1.15)$$

а функция

$$S(t) = \sum_{n,k} a_n^k \chi_n^k(t). \qquad (1.16)$$

При каждом фиксированном

$$\forall\, t \in [0,\ 1] \quad \exists\, k : \chi_n^k(t_0) \neq 0.$$

Другими словами, в окрестности точки t_0 функция $S(t)$ интегрируется n раз.

Чтобы уменьшить количество операций интегрирования при вычислении коэффициентов ряда (1.15) в n раз при ограничении количества членов ряда (1.16) функциями порядка n и ниже, рассмотрим матрицу, строками которой являются ненормированные дискретные функции Хаара соответствующего порядка. Обозначим эту матрицу A_π. Построим вектор

$$\bar{S}^T = \left(\int_0^{1/2^{n+1}} \bar{S}(t)\,dt,\ \int_{1/2^{n+1}}^{2/2^{n+1}} \bar{S}(t)\,dt,\ \ldots,\ \int_{1-1/2^{n-1}}^{1} \bar{S}(t)\,dt \right)$$

(T — знак транспонирования).

Вектор $\bar{S}_\chi = A_\pi \bar{S}$ состоит из коэффициентов a_n^k разложения функции $s'(t)$ в ряд Фурье — Хаара. При этом функция (при нахождении вектора $\bar{S}$) интегрируется однократно на интервале [0,1].

Матрицей дискретного преобразования Фурье будет матрица A_π, умноженная на $1/\sqrt{2^{n+1}}$ (для нормирования к 1 системы ортогональных векторов, составляющих матрицу). Обозначим $A_\pi/\sqrt{2^{n+1}}$ через A_π^D. С помощью дискретного преобразования Хаара сигнал (определим его как вектор, элементами которого будут значения функции $S(t)$ в 2^{n+1} равноотстоящих точках интервала $[0, 1]$) можно представить в виде суммы дискретных функций Хаара:

$$\overline{S}^D = \sum_{n,k} a_n^k \chi_n^{k(D)}. \tag{1.17}$$

Так как строки матрицы A_π^D — ортонормированная система векторов, являющихся дискретными функциями Хаара, коэффициенты суммы (1.17) будут скалярные произведения вектора $\overline{S}^D$ на строки матрицы A_π^D. Обозначив вектор коэффициентов суммы (1.17) через $\overline{S}_\chi^D$, получим $\overline{S}_\chi^D = A_\pi^D S^D$.

Точность приближения непрерывными функциями Хаара равна Mh, где M — максимум первой производной приближаемой функции (для гармоники M равно круговой частоте сигнала $\cos\omega t$, $\sin\omega t$); $h = 1/2^{n+1}$ — величина шага ступенчатой функции, которую образует частичная сумма ряда Фурье — Хаара для приближаемой функции.

В случае дискретного приближения, если количество членов ряда Фурье — Хаара взято равным количеству отсчетов приближаемого сигнала, представление является точным, без погрешности (так как это просто разложение вектора из Евклидова пространства E^n по n линейно независимым векторам).

Период аппроксимируемого сигнала определяется по формуле $T_а = 2^{-n}\, l$ с, где 2^{-n} — длительность

соответствующей функции Хаара; l — число функций Хаара ($n = \text{const}$), укладывающихся в периоде аппроксимируемого сигнала.

Абсолютная погрешность в определении периода определяется по формуле $\Delta T = T - 2^{-n} l \leqslant 2^n$, где T — период аппроксимируемой функции.

Относительная погрешность $\gamma \leqslant \Delta T/T \leqslant 1/(2^n T)$, откуда $2^n \geqslant 1/(\gamma T)$, а

$$n \geqslant -(\ln \gamma - \ln T)/\ln 2. \qquad (1.18)$$

Формула (1.18) устанавливает аналитическую связь между периодом анализируемого сигнала, размерностью базиса Хаара и допустимой погрешностью представления периода анализируемого сигнала.

Реализуемость методов анализа сигнала в базисе Хаара определяется возможностью вычислительных машин. Рассмотрим аналитическую связь периодов, входящих в формулу (1.18), с быстродействием ЦВМ. Если задана частота сигнала и относительная погрешность разложения γ, то по формуле (1.18) можно определить необходимую размерность базиса Хаара.

Для выбора вычислительной машины необходимо знать быстродействие ЦВМ при выполнении элементарных операций: $Б_{(+)}$, $Б_{(1)}$, $Б_{(2)}$, $Б_{(\times)}$, $Б_{(\text{уп})}$ — скорости выполнения операции соответственно сложения, сдвига на один разряд, сдвига на два разряда, умножения, условного перехода.

Время, затрачиваемое вычислительной машиной на разложение сигнала, определяется формулой

$$T_{\text{ЦВМ}} = \left(\frac{d}{Б_{(+)}} + \frac{d}{2Б_{(1)}} + \frac{d}{2Б_{(2)}} + \frac{2d}{Б_{(\text{уп})}}\right) n + \frac{2^n}{Б_{(\times)}} + \frac{2}{Б_{(\text{уп})}} \cdot 2^n,$$

где n — количество дискретизаций интервала [0,1].

Если время T превышает допустимое время обработки сигнала T_0, то данная ЦВМ не удовлетворяет поставленным требованиям. Если $T \leqslant T_0$, то быстродействия ЦВМ достаточно, чтобы с заданной точностью разложить сигнал в базисе Хаара.

Глава 2

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ УОЛША

1. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИЙ УОЛША

Имеется дифференциальное уравнение n-го порядка

$$\frac{d^{(n)}x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{(n-1)}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)\,x = f(t)$$

с начальными условиями, определенными для $t = t_0$,

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_0', \ \ldots, \ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}.$$

Положим, что

$$\frac{d^{(n)}x}{dt^n} = U(t), \tag{2.1}$$

где $U(t)$ — известная функция.

Проинтегрировав обе части выражения (2.1), найдем

$$x^{(n-1)} = \int_{t_0}^{t} U(\xi)\,d\xi + x^{(n-1)}(t_0). \tag{2.2}$$

Интегрируя аналогично выражение (2.2), получаем

$$x^{(n-2)} = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} U(\xi)\, d\xi^2 + x^{(n-1)}(t_0)\frac{t-t_0}{1} + x^{(n-2)}(t_0);$$

m-й интеграл от (2.1)

$$x^{(n-m)} = \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} U(\xi)\, d\xi^m + x^{(n-1)}(t_0)\frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!} +$$

$$+ x^{(n-2)}(t_0)\frac{(t-t_0)^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + x^{(n-m)}(t_0)$$

или в более компактной форме

$$x^{(n-m)} = \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} U(\xi)\, d\xi^m + \sum_{k=1}^{m} x^{(n-k)}(t_0)\frac{(t-t_0)^{m-k}}{(m-k)!}. \tag{2.3}$$

Искомая функция $x(t)$ находится из выражения (2.3) при $m = n$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} U(\xi)\, d\xi^n + \sum_{k=1}^{n} x^{(n-k)}(t_0)\frac{(t-t_0)^{n-k}}{(n-k)!}. \tag{2.4}$$

Если в исходное уравнение (2.1) подставить значения функции $x(t)$ и производных, определенных выражением (2.3), то получим

$$U(t) + a_1(t)\int_{t_0}^{t} U(\xi)\, d\xi + a_2(t)\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} U(\xi)\, d\xi^2 +$$

$$+ \cdots + \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} U(\xi)\, d\xi^n + a_1(t)\, x^{(n-1)}(t_0) +$$

$$+ a_2(t)\, x^{(n-1)}(t_0)\frac{t-t_0}{1} + a_2(t)\, x^{(n-2)}(t_0) + \cdots +$$

$$+a_n(t)\sum_{k=1}^{n} x^{(n-k)}(t_0)\frac{(t-t_0)^{n-k}}{(n-k)!}=f(t). \qquad (2.5)$$

Все слагаемые, не содержащие интегралов в выражении (2.5), запишем в виде суммы:

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x^{(n-k)}(t_0)\, a_m(t)\frac{(t-t_0)^{m-k}}{(m-k)!},$$

а кратные интегралы сведем к простым по формуле

$$\int_{t_0}^{t}\ldots\int_{t_0}^{t} U(\xi)\, d\xi^m=\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}U(\xi)\, d\xi. \qquad (2.6)$$

С учетом формулы (2.6) слагаемые в выражении (2.5), содержащие $U(t)$ под знаком интеграла, запишутся следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{n} a_m(t)\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\xi)^{m-1}}{(m-1)!}U(\xi)\, d\xi.$$

Положив

$$g(t)=f(t)-\sum_{m-1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x^{(n-k)}(t_0)\, a_m(t)\frac{(t-t_0)^{m-k}}{(m-k)!},$$

получим следующее выражение:

$$U(t)+\sum_{m=1}^{n}\frac{a_m(t)}{(m-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{m-1}U(\xi)\, d\xi=g(t), \qquad (2.7)$$

которое является уравнением Вольтерра второго рода. Решение этого уравнения с использованием функций Уолша [27] требует представления в виде ряда Фурье по функциям Уолша множителя, стоящего под

n \ m	0	1	2	3	4	5
0 00	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
1 01	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{32}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{31}{192}$
2 10	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{31}{256}$	$-\frac{15}{128}$	$-\frac{691}{6144}$
3 11	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{27}{256}$	$\frac{55}{512}$
4 100	0	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{127}{2048}$	$-\frac{63}{1024}$	$-\frac{11\,971}{196\,608}$
5 101	0	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{111}{2048}$	$\frac{235}{4096}$
6 110	0	0	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{123}{4096}$	$\frac{295}{8192}$
7 111	0	0	0	$-\frac{3}{256}$	$-\frac{3}{128}$	$-\frac{535}{16\,384}$
8 1000	0	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{511}{16\,384}$	$-\frac{255}{8192}$	$-\frac{195\,331}{6\,291\,456}$

Таблица 3

6	7	8
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
$-\frac{9}{64}$	$-\frac{127}{1024}$	$-\frac{85}{768}$
$-\frac{219}{2048}$	$-\frac{13\,231}{131\,072}$	$-\frac{9325}{93\,304}$
$\frac{429}{4096}$	$\frac{819}{8192}$	$\frac{18\,565}{196\,608}$
$-\frac{3939}{65\,536}$	$-\frac{993\,007}{16\,777\,216}$	$-\frac{731\,725}{12\,582\,912}$
$\frac{7659}{131\,072}$	$\frac{15\,309}{262\,144}$	$\frac{1\,454\,125}{25\,165\,824}$
$\frac{10\,749}{262\,144}$	$\frac{23\,499}{524\,288}$	$\frac{2\,390\,725}{60\,331\,648}$
$-\frac{645}{16\,384}$	$-\frac{46\,179}{1\,048\,576}$	$-\frac{37\,065}{786\,432}$
$-\frac{64\,899}{2\,097\,152}$	$-\frac{66\,198\,511}{2\,147\,483\,648}$	$-\frac{49\,424\,845}{1\,610\,612\,736}$

знаком суммы во втором слагаемом (2.7),

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-\xi)^{m-1}U(\xi)\,d\xi=\sum_{r=0}^{\infty}C_r(m,\ n)\,w_r(t),\qquad(2.8)$$

что в свою очередь требует представления в виде ряда Фурье по функциям Уолша функции t^m $(0\leqslant t<1)$ и интегрирования функций Уолша. Покажем это. Запишем ряд для t^m в виде

$$t^m=\sum_{n=0}^{\infty}D_n(m)\,w_n(t),\qquad 0\leqslant t<1.$$

Коэффициенты ряда $D_n(m)$ определяются из уравнения

$$D_n(m)=\int_0^1 t^m w_n(t)\,dt.\qquad(2.9)$$

Можно показать, что, например, для $n=2$ (или в двоичной форме записи двойки — «10») интегрирование по частям уравнения (2.9) и выполнение простейших преобразований с использованием свойств функций Уолша дает

$$D_{10}(m)=\int_0^t t^m w_{10}(t)\,dt=\frac{2}{4^{m+1}(m+1)}\times$$

$$\times\left[1-2^{m+1}+3^{m+1}-\frac{1}{2}\,4^{m+1}\right].$$

В табл. 3 [10] приведены значения $D_n(m)$ для целых n и m в пределах от 0 до 8.

Для интегрирования функций Уолша $\int_0^t w_{00}(\xi)\,d\xi=$ $=t,\ 0\leqslant t<1;$ $\int_0^t w_{01}(\xi)\,d\xi=t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2};$ $\int_0^t w_{01}(\xi)\,d\xi=$

$=1-t,\ \frac{1}{2}\leqslant t<1$ используем табл. 3, откуда при $m=1$ находим

$$t=\frac{1}{2}w_{00}(t)-\frac{1}{4}w_{01}(t)-\frac{1}{8}w_{10}(t)-$$
$$-\frac{1}{16}w_{100}(t)-\ldots \qquad (2.10)$$

Учитывая выражение (2.10) и правило умножения функций Уолша, получаем

$$\int_0^t w_{01}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{4}w_{00}(t)-\frac{1}{8}w_{11}(t)-$$
$$-\frac{1}{16}w_{101}(t)-\frac{1}{32}w_{1001}(t)-\ldots,$$

или в общем виде

$$\int_0^t w_n(\xi)\,d\xi=\sum_{m=0}^{\infty}d_n(m)\,w_m(t).$$

Коэффициенты разложения $d_n(m)$ сведены в табл. 4 [27]. Разложим интеграл вида (2.8), где $U(\xi)=$ $=w_{01}(\xi)$, в ряд Фурье по функциям Уолша:

$$\frac{1}{m!}\int_0^t (t-\xi)^m w_{01}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}-\dfrac{1}{m!}\left[\dfrac{(t-\xi)^{m+1}}{m+1}\right]^t=\dfrac{t^{m+1}}{(m+1)!}, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{2};\\[2ex] \dfrac{t^{m+1}-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^{m+1}}{(m+1)!}, & \dfrac{1}{2}\leqslant t<1.\end{array}\right.$$

Используя функции Уолша, получаем (для интервала

Таблица 4

n \ m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
00	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	0	0	$-\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0
01	$-\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	0	0	$-\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0
10	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{16}$	0	0	0	$-\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0
11	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{16}$	0	0	0	$-\frac{1}{32}$	0	0	0	0
100	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{32}$	0	0	0
101	0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{32}$	0	0
110	0	0	$\frac{1}{16}$	0		0	0		0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{32}$	0

111	0	0	0	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{32}$
1000	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1001	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1010	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1011	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1100	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1101	0	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1110	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1111	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 5

	0	01	10	11	100	101	110	111
0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	0
01	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{32}$	0	$-\frac{1}{64}$	0	0	$\frac{1}{128}$
10	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{48}$	0	$-\frac{1}{128}$	0	0	0
11	$\frac{1}{32}$	0	0	$-\frac{1}{48}$	0	$-\frac{1}{128}$	0	0
100	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{128}$	0	$-\frac{1}{192}$	0	0	0
101	$\frac{1}{64}$	0	0	$-\frac{1}{128}$	0	$-\frac{1}{192}$	0	0
110	$\frac{1}{128}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{192}$	0
111	0	$\frac{1}{128}$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{192}$

[0, 1])

$$\frac{1}{m!}\int_0^t (t-\xi)^m w_{01}(\xi)\,d\xi = \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}w_0(t) -$$

$$-\frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)^{m+1}}{(m+1)!}[w_0(t)-w_{01}(t)].$$

Раскладывая каждую степень t и $t-1/2$ с использованием табл. 3, перемножая функции Уолша и группируя члены, можно получить коэффициенты разложения $G_r(m, 1)$. Значения этих коэффициентов для $m=1$ и $m=2$ приведены соответственно в табл. 5 и 6 [27].

Пример 1. Решим дифференциальное уравнение $\dot{x}-x=0$; $x(1)=1$.

Таблица 6

	0	01	10	11	100	101	110	111
0	$\frac{1}{24}$	$-\frac{7}{192}$	$-\frac{31}{1536}$	$\frac{1}{64}$	$-\frac{127}{12\,288}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$-\frac{1}{512}$
01	$\frac{7}{192}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$	$\frac{17}{1536}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{65}{12\,288}$	$\frac{1}{512}$	0
10	$\frac{31}{1536}$	$-\frac{1}{64}$	$-\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$-\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{17}{12\,288}$	0
11	$\frac{1}{64}$	$-\frac{17}{1536}$	$-\frac{1}{256}$	0	$\frac{1}{512}$	0	0	$\frac{17}{12\,288}$
100	$\frac{127}{12\,288}$	$-\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$-\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	0
101	$\frac{1}{128}$	$-\frac{65}{12\,288}$	$-\frac{1}{512}$	0	$-\frac{1}{1024}$	0	0	$\frac{1}{2048}$
110	$\frac{1}{256}$	$-\frac{1}{512}$	$-\frac{17}{12\,288}$	0	$-\frac{1}{2048}$	0	0	0
111	$\frac{1}{512}$	0	0	$-\frac{17}{12\,288}$	0	$-\frac{1}{2048}$	0	0

Пусть $U(t) = \dot{x}$, тогда соответствующее интегральное уравнение

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(\xi)\, d\xi.$$

Возьмем первое приближение в виде $U_0(t) = w_0(t)$, тогда с помощью табл. 6

$$U_1(t) = w_0(t) + \int_0^t w_0(\xi)\, d\xi = \frac{3}{2} w_0(t) - \frac{1}{4} w_{01}(t).$$

Второе приближение

$$U_2(t) = w_0(t) + \int_0^t \left[\frac{3}{2} w_0(\xi) - \frac{1}{4} w_{01}(\xi)\right] d\xi =$$

$$= \frac{27}{16} w_0(t) - \frac{3}{8} w_{01}(t) - \frac{3}{16} w_{10}(t) + \frac{1}{32} w_{11}(t) - \ldots$$

Этот процесс можно продолжать до получения требуемой точности. Для определения $x(t)$ необходимо полученное для $U(t)$ выражение проинтегрировать с помощью табл. 4. Это дает ступенчатую функцию. Для восьмичленного приближения результат приведен в табл. 7. Здесь же для сравнения приводятся значения, соответствующие точному решению в точках, лежащих на середине двоичных отрезков.

Таблица 7

Двоичные отрезки	$x(t)$ (восьмичленное приближение)	e^t (точное решение)
0—1/8	1,065 19	1,064 49
1/8—2/8	1,207 01	1,206 23
2/8—3/8	1,367 73	1,366 84
3/8—4/8	1,549 83	1,548 83
4/8—5/8	1,756 21	1,755 05
5/8—6/8	1,990 03	1,988 74
6/8—7/8	2,254 99	2,253 53
7/8—1	2,555 25	2,553 59

Таким образом, с помощью предварительно рассчитанных таблиц (вида табл. 3—6) можно достаточно просто находить решения дифференциальных и интегральных уравнений. При этом в каждом малом интервале приближенное решение будет стремиться к среднему значению истинного решения для того же интервала. Способы построения электронных схем для реализации табличных функций подробно изложены в [23].

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АДАМАРА ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Если имеются результаты замеров полезного полиномиального сигнала $S(t)$ в аддитивной смеси с помехой $\zeta(t)$:

$$x(t) = s(t) + \zeta(t), \tag{2.11}$$

где $s(t) = \sum_{i=0}^{n} k_i t^i$, оценки $\hat{K}_i$ коэффициентов k_i, полученные с помощью обработки замеров (2.11), взятых в дискретные моменты времени t_m $(m = \overline{1, N})$ по методу наименьших квадратов (МНК), есть результат решения системы нормальных уравнений

$$A^T A\hat{K} = A^T X. \tag{2.12}$$

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_N & t_N^2 & \ldots & t_N^n \end{bmatrix};$$

$$\hat{K}^T = [\hat{k}_0, \hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_n]; \quad X^T = [x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)].$$

При этом корреляционная матрица оценок

$$D(\hat{k}) = \sigma^2 (A^T A)^{-1},$$

где σ^2 — дисперсия помехи $\zeta(t)$.

Хорошо известны трудности, возникающие при практическом решении системы (2.12) и связанные с плохой обусловленностью матрицы A [25] при больших N и чувствительностью решения к вариациям значений элементов матрицы и правых частей исходной системы, вызванных помехами и вычислительными погрешностями.

Наиболее эффективные методы преодоления указанных трудностей (метод ортогонализации и метод регуляризации А. Н. Тихонова) не просты в технической реализации. Поэтому здесь будет рассмотрен, хотя и менее эффективный, но более просто реализуемый на практике метод решения в частотной области. Пусть имеется система уравнений

$$A\hat{K} = X. \tag{2.13}$$

Преобразуем ее по Адамару, для чего умножим слева обе части равенства (2.13) на матрицу H размерности $N \times N$ $(N = 2^k)$:

$$HA\hat{K} = HX. \tag{2.14}$$

Адамаров спектр вектора замеров обозначим через $X^* = HX$, а матрицу HA через A^*, тогда равенство (2.14) запишем в виде

$$A^*\hat{K} = X^*. \tag{2.15}$$

Образуя из выражения (2.15) систему нормальных

уравнений и решая ее, найдем

$$\hat{K} = [(A^*)^T A^*]^{-1} (A^*)^T X^*.$$

Корреляционная матрица оценок в этом случае остается той же. Действительно,

$$D(\hat{K}) = [(A^*) A^*]^{-1} (\sigma^*)^2 = [(HA)^T HA]^{-1} N\sigma^2 =$$
$$= [A^T HHA]^{-1} N\sigma^2 = [A^T A] N\sigma^2/N = \sigma^2 [A^T A].$$

Однако переход к новой матрице системы A^* приводит к новому спектру матрицы. Обусловленность системы улучшается, так как происходит проектирование векторов-строк матрицы A.

Пример 2. Пусть дана плохо обусловленная система

$$\begin{bmatrix} 10{,}04 & 19{,}98 \\ 19{,}98 & 40{,}01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}. \qquad (2.16)$$

Собственные значения матрицы системы находим из уравнения

$$\lambda^2 - 50{,}05\lambda + 2{,}5 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0{,}05$ и число обусловленности $Z_0 = 50/0{,}05 = 1000$, что говорит о высокой чувствительности решения к вариациям числовых значений правых частей системы (2.16). Геометрически это означает, что система (2.16) описывает две прямые, пересекающиеся под очень малым углом (почти параллельные прямые). Преобразуем систему (2.16) по Адамару

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10{,}04 & 19{,}98 \\ 19{,}98 & 40{,}01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

В результате получаем

$$\begin{bmatrix} 30{,}02 & 59{,}99 \\ -9{,}94 & -20{,}03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_0 \\ \hat{K}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ -50 \end{bmatrix}. \qquad (2.17)$$

Собственные значения матрицы системы (2.17) находятся из уравнения

$$\lambda^2 - 9{,}99\lambda - 5 = 0,$$

решая которое, найдем $\lambda_1 = 10{,}46$ и $\lambda_2 = -0{,}48$, откуда число обусловленности $Z_{oH} = |10{,}46|/|0{,}48| \approx 22$. Выигрыш, который при этом получается, составляет $Z_o/Z_{oH} = 1000/22 = 45$ раз.

Обратим внимание еще на одну особенность преобразованной системы. Рассмотрим для этого случай, когда влиянием помех в выражении (2.11) можно пренебречь. Пусть $s(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2$ и замеры представлены в виде вектора

$$S^T = [s(t_1),\ s(t_2),\ s(t_3),\ s(t_4)].$$

Матрица системы в этом случае

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ 1 & t_4 & t_4^2 \end{bmatrix}.$$

Преобразуя эту систему по Адамару, получаем

$$\begin{bmatrix} 4 & (t_1 + t_2 + t_3 + t_4) & (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) \\ 0 & (t_1 + t_2 - t_3 - t_4) & (t_1^2 + t_2^2 - t_3^2 - t_4^2) \\ 0 & 0 & (t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 + t_4^2) \\ 0 & (t_1 - t_2 + t_3 - t_4) & (t_1^2 - t_2^2 + t_3^2 - t_4^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_0 \\ \hat{k}_1 \\ \hat{k}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s(t_1) + s(t_2) + s(t_3) + s(t_4) \\ s(t_1) + s(t_2) - s(t_3) - s(t_4) \\ s(t_1) - s(t_2) - s(t_3) + s(t_4) \\ s(t_1) - s(t_2) + s(t_3) - s(t_4) \end{bmatrix}. \qquad (2.18)$$

Если использовать только первые три уравнения системы (2.18), что вполне достаточно (система становится определенной), то приходим к системе с треугольной матрицей. Решение такой системы не представляет затруднений и не требует обращения матрицы.

Глава 3

СИНТЕЗ СТРУКТУРЫ ФИЛЬТРОВ

1. ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

Цифровые фильтры (ЦФ) по сравнению с аналоговыми имеют ряд преимуществ.

1. ЦФ не имеет реактивных элементов, поэтому при его разработке исключаются все проблемы, связанные с точностью изготовления и стабильностью этих элементов.

2. ЦФ можно выполнять на интегральных схемах или в виде нескольких (или даже одной) интегральных субсистем. Такие фильтры экономичны, имеют небольшие размеры.

3. ЦФ могут быть запрограммированы в тех случаях, когда для обработки сигналов применяется ЦВМ, работающая в реальном масштабе времени. Такая реализация ЦФ особенно удобна, когда ЦВМ используется для моделирования динамических систем.

4. Характеристики ЦФ прогнозируются и выполняются с высокой точностью.

5. Характеристические частоты ЦФ зависят от внешней тактовой характеристики (частоты). Изменяя эту частоту, можно легко перестраивать фильтр. Можно также легко изменять и другие параметры фильтра (ширину полосы пропускания), что дает возможность использовать их в адаптивных и следящих системах.

6. ЦФ имеют высокую стабильность, определяемую стабильностью генератора тактовой частоты. Это позволяет реализовать фильтры с очень высокой добротностью или чрезвычайно большими постоянными времени.

7. ЦФ можно выполнять с линейными фазовыми характеристиками, что важно в тех случаях синтеза

систем, когда необходимо иметь постоянную задержку на всех частотах или хорошую импульсную характеристику.

8. При разработке ЦФ не возникает проблем с физической реализацией отрицательных индуктивностей, поэтому можно увеличить разнообразие структур фильтров.

9. При разработке ЦФ не возникает задача согласования нагрузок.

10. Преимущества ЦФ особенно видны на сверхнизких частотах, где габаритные размеры аналоговых фильтров недоступно велики.

11. ЦФ не имеет дрейфа, присущего активным фильтрам.

12. В случае реализации фильтровых гребенок одно управляющее устройство и один арифметический блок могут обслуживать много ЦФ, что дает существенную экономию оборудования.

В то же время следует иметь в виду, что в отличие от аналоговых фильтров работа ЦФ сопровождается образованием специфического шума за счет недостаточно четкого ограничения полосы частот входного аналогового сигнала, неточного определения частоты дискретизации и применения квантования, а также за счет неизбежного округления чисел при проведении вычислений. Области применения ЦФ и вообще цифровых методов обработки сигналов в значительной степени определяются возможным быстродействием используемых вычислительных средств.

Математические схемы цифровых фильтров описываются с помощью разностных схем подобно тому, как схемы аналоговой фильтрации описываются с помощью дифференциальных уравнений. Для решения разностных уравнений и синтеза ЦФ удобно использовать математический аппарат z-преобразований, выполняющий в дискретном анализе ту же роль, что и

преобразование Лапласа в непрерывном анализе. Некоторые типы ЦФ можно рассматривать как аппроксимацию известных аналоговых фильтров. В общем же случае ЦФ составляют широкий класс устройств, которые можно проектировать непосредственно, не опираясь на аналоговые прототипы, т. е. можно создать ЦФ, не имеющие себе подобных среди аналоговых фильтров.

В ЦФ входной и выходной сигналы квантуются по времени и по уровню и системная функция реализуется в числовом виде так же, как и в вычислительных машинах. Цифровой фильтр по существу реализует решение разностных уравнений, с помощью которых связывается требуемый выходной сигнал и текущие значения входного, а также предыдущие значения входного и выходного сигналов. Его основными элементами являются линии задержки, умножители на константу и сумматоры. Уравнение, описывающее ЦФ, можно записать в виде

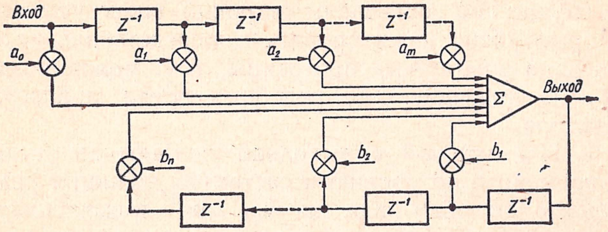
$$y[N] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x[n-k] + \sum_{n=1}^{\infty} y[n-k]\, b_k. \qquad (3.1)$$

Из этого уравнения следует, что текущее значение выходного сигнала $y[n]$ находится взвешиванием и последующим суммированием текущего значения входного сигнала $x[n]$ и предыдущих значений $x[n-k]$ и выходного сигнала $y[n-k]$.

Фильтр, выходной сигнал которого является функцией только значений входного сигнала и не зависит от предыдущих значений выходного ($b_k = 0$), называется поперечным или нерекурсивным. Однако, если выходной сигнал ЦФ зависит хотя бы от одного предыдущего значения выходного сигнала, то фильтр называется рекурсивным.

Рекурсивные ЦФ в основном бывают прямой или канонической формы (рис. 10, *а*, *б*). Обычно отдается

предпочтение фильтру канонической формы, поскольку он имеет вдвое меньше задержек и, следовательно, меньший уровень собственных шумов, хотя оба вида



а

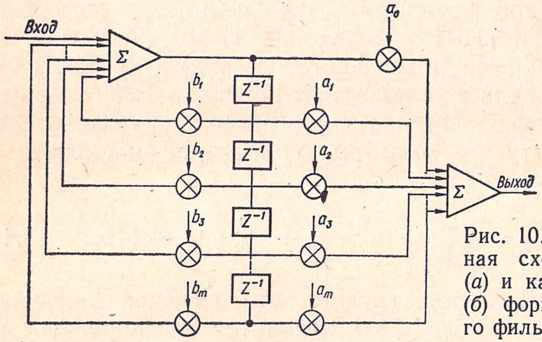


Рис. 10. Структурная схема прям:й (*а*) и канонической (*б*) форм цифрового фильтра.

б

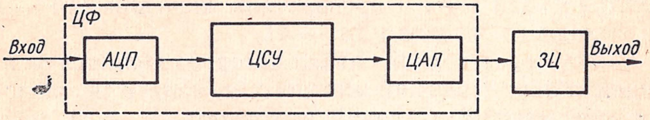


Рис. 11. Обобщенная структура цифрового фильтра *ЦФ*.

фильтров описываются одним и тем же разностным уравнением. Фильтры высших порядков любой формы чувствительнее к неточности величин коэффициентов, вызванной ограниченной длиной слова.

Рассмотрим принцип действия цифровых фильт-

ров, выполняющих одни и те же операции. Фильтр *ЦФ*, схема которого показана на рис. 11, состоит из трех частей: преобразователя аналог — цифра *АЦП*; цифрового счетного устройства *ЦСУ*; преобразователя цифра — аналог *ЦАП*.

Входным и выходным сигналами *ЦФ* являются узкие модулированные по амплитуде импульсы (по одному за период стробирования $T_s = 2\pi/\omega_s$). В моменты времени $t = nT_s$ мгновенно производятся отсчеты непрерывного входного сигнала и на входе *ЦФ* появляется импульс $x(nT_s)$. В преобразователе *АЦП* амплитуда импульса переводится в кодовое слово, являющееся кодированной последовательностью бинарных единиц (бит), которые представляют амплитуду $x(nT_s)$. Точность ее представления определяется длиной слова, т. е. количеством содержащихся в нем бит. Все работы производятся над этими словами, а выход вычислительного устройства подключается к преобразователю *ЦАП* для того, чтобы получить выходной импульс фильтра $y[nT_s]$. Вслед за *ЦФ* размещена схема затягивания *ЗЦ*, превращающая последовательность импульсов в непрерывный выходной сигнал. Ступеньки, получающиеся при такой аппроксимации, могут быть устранены последующей аналоговой фильтрацией.

Для того чтобы ЦФ работал в аналоговых схемах в реальном масштабе времени, требуются промежуточные цепи. Типичные входные и выходные цепи вместе с ЦФ показаны на рис 12, *а*. Спектры сигналов в отмеченных буквами точках этой схемы изображены на рис. 12, *б*. Входной спектр *А* показывает, что можно ожидать присутствия сигнала любой частоты. Поскольку стробирование по сути является модуляционным процессом, частота его должна выбираться вдвое выше верхней частоты входного сигнала, иначе произойдет перекрытие спектров. Эта минимальная

частота стробирования является частотой Найквиста. Поэтому, чтобы подготовить аналоговый сигнал к процессу последовательной дискретизации, вначале сигнал следует ограничить по полосе частот путем фильтрации фильтром низких частот *ФНЧ*. В зависимости от заданной фазовой характеристики может потребоваться фазовый корректор *ФК* (фильтр, пропускающий все частоты) для компенсации фазовых искажений, вносимых фильтром низких частот.

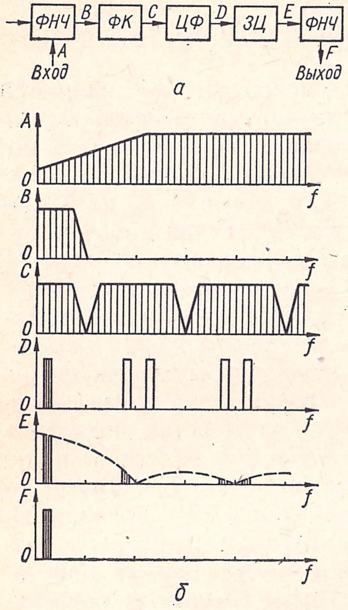


Рис. 12. Структурная схема цифрового фильтра (*а*), работающего в аналоговых схемах, и спектры сигналов в характерных точках этой схемы (*б*).

Для иллюстрации предположим, что цифровой фильтр имеет характеристику идеального полосового фильтра от $\omega = \omega_s/10$ до $\omega = \omega_s/5$. Выходной спектр напоминает входной спектр тем, что и его полоса пропускания как бы модулируется на частотах, кратных частоте стробирования.

Обычно используемые затягивающие цепи *ЗЦ* — это цепи нулевого порядка. Такая цепь задерживает величину последнего импульса до появления следующего. Передаточная функция затягивающегося устройства нулевого порядка имеет вид

$$H_0(\omega) = \sin(\omega T_s/2)/(\omega T_s/2) < -(\omega T_s/2).$$

Абсолютная величина АЧХ этой функции показана на рис. 12, *б*, где хорошо заметна фильтрация высших гармоник. В зависимости от применения может быть желательной последующая фильтрация обычным фильтром низких частот (срезаются ступеньки функции).

Полный фазовый сдвиг равен сумме фазовых сдвигов, вносимых в *ЦФ* затягивающей цепью, обычными аналоговыми фильтрами и задержкой в цепи сигнала. Фазовый угол, обусловленный временно́й задержкой t_g, возрастает линейно с ростом частоты и имеет величину $-\omega t_g$ рад. Временные задержки возникают в *АЦП* и в счетном устройстве. Время счета уменьшается с ростом стоимости и сложности и увеличивается с ростом требований к точности. Поскольку счет должен быть закончен за период стробирования, время счета накладывает ограничения на верхнюю частоту стробирования.

Для анализа ЦФ используется z-преобразование, которое записываем в следующем виде:

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s)\, z^{-n}.$$

С учетом этого выражения перепишем уравнение (3.1) в виде

$$y(z) = x(z) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} + y(z) \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}. \qquad (3.2)$$

Уравнения (3.1) и (3.2) идентичны и одно из них можно легко получить из другого. Для этого нужно предыдущие значения сигнала умножить на z^{-k}, где k — количество периодов частоты стробирования, на которое следует сдвинуть импульсы или слово. Из

уравнения (3.2) можно определить передаточную функцию системы

$$H(z) = y(z)/x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \Big/ \left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}\right). \quad (3.3)$$

С полюсами и нулями этой функции в z-плоскости можно оперировать так же, как с полюсами и нулями передаточной функции.

2. МЕТОДЫ УПРОЩЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Передаточная функция цифровых фильтров может оказаться сложной — иметь высокий порядок, обладать неминимально фазовыми свойствами.

Для упрощения структуры математических моделей синтезируемых цифровых фильтров применяются методы теории гомоморфизмов.

Рассмотрим некоторые методы синтеза структуры гомоморфных фильтров, полученных эквивалентным упрощением исходных моделей.

МЕТОД ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Пусть имеется исходная структура фильтра с характеристикой K_p. Известно, что частотные характеристики устойчивой системы, полученные из передаточной функции при $p = j\omega$ (в случае дискретного времени $K(z)$ при $z = e^{j\omega T}$), однозначно определяют ее динамические свойства. Поэтому в качестве критерия для понижения порядка передаточной функции дифференциального (разностного) уравнения может быть принято условие, состоящее в том, что мало от-

личающимся частотным характеристикам соответствуют мало отличающиеся переходные процессы.

Рассмотрим устойчивую линейную систему, выходная величина которой в форме z-преобразования имеет вид

$$x(z) = K(z)\,Y(z), \tag{3.4}$$

где $x(z)$, $Y(z)$ — z-изображения соответственно выходной величины $x(k\Delta t)$ и внешнего воздействия $Y(k\Delta t)$; Δt — период дискретизации, а

$$K(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + 1} \tag{3.5}$$

— передаточная функция.

Задача заключается в том, чтобы достаточно точно описать переходные процессы в этой системе передаточной функции пониженного порядка

$$K_1(z) = \frac{d_s z^s + d_{s-1} z^{s-1} + \cdots + d_1 z + d_0}{c_r z^r + c_{r-1} z^{r-1} + \cdots + c_1 z + 1}, \quad (s < r < n), \tag{3.6}$$

которая с достаточной точностью аппроксимирует исходную.

Из теории дробно-рациональных приближений функций в комплексной области известно, что наилучшее приближение, не требующее сложных выкладок, получается при помощи цепных дробей [7].

Передаточным функциям (3.4) и (3.5) соответствуют АЧХ

$$K(e^{j\omega T}) =$$

$$= \frac{b_m (e^{j\omega T})^m + b_{m-1} (e^{j\omega T})^{m-1} + \cdots + b_1 (e^{j\omega T}) + b_0}{a_n (e^{j\omega T})^n + a_{n-1} (e^{j\omega T})^{n-1} + \cdots + a_1 (e^{j\omega T}) + 1};$$

$$K_1(e^{j\omega T}) =$$

$$= \frac{d_s (e^{j\omega T})^s + d_{s-1} (e^{j\omega T})^{s-1} + \cdots + d_1 (e^{j\omega T}) + d_0}{c_r (e^{j\omega T})^r + c_{r-1} (e^{j\omega T})^{r-1} + \cdots + c_1 (e^{j\omega T}) + 1}, \quad (3.7)$$

где b_0 и d_0 — коэффициенты усиления, определяющие статические свойства системы, поэтому $d_0 = b_0$ при условии тождественности статических свойств.

Для определения остальных коэффициентов c_1, c_2, ..., c_r, d_1, d_2, ..., d_s АЧХ $K(e^{j\omega T})$ выражение (3.7) преобразуем в соответствующую цепную дробь

$$K(e^{j\omega T}) = \frac{\alpha_{1,0}}{1} + \frac{\alpha_{2,0}(e^{j\omega T})}{\alpha_{1,0}} + \frac{\alpha_{3,0}(e^{j\omega T})}{\alpha_{2,0}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\alpha_{2n,0}(e^{j\omega T})}{\alpha_{2n-1,0}} \quad (3.8)$$

при условии $\alpha_{k,0} \neq 0$; $\alpha_{1,k} = b_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m)$; $\alpha_{0,k} = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Если $\alpha_{k,0} = 0$, то цепная дробь имеет вид

$$K(e^{j\omega T}) = \frac{\alpha_{1,0}}{1} + \frac{\alpha_{2,0}(e^{j\omega T})}{\alpha_{1,0}} + \cdots + \frac{\alpha_{k-1,0}(e^{j\omega T})}{\alpha_{k-2,0}} +$$
$$+ \frac{\alpha_{k,1}(e^{j\omega T})}{\alpha_{k-1,0}} + \frac{\alpha_{k+1,1}(e^{j\omega T})}{\alpha_{k,1}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\alpha_{2n-1,1}(e^{j\omega T})}{\alpha_{2n-1,1}}. \quad (3.9)$$

Коэффициенты $\alpha_{k,0}$ в выражениях (3.8) и (3.9) при условии $\alpha_{00} = 1$ определяем по формуле

$$\alpha_{k,i} = \alpha_{k-1,0}\alpha_{k-2,i+1} - \alpha_{k-2,0}\alpha_{k-1,i+1}.$$

Если вместо каждой цепной дроби (3.8) и (3.9) взять необходимую дробь, имеющую тот же порядок, что и (3.7), то получим

$$K_1(e^{j\omega T}) = P_k(e^{j\omega T})/[Q(e^{j\omega T})],$$

где k — порядок подходящей дроби, которую находим по формуле

$$\frac{P_k(e^{j\omega T})}{Q_k(e^{j\omega T})} = \frac{\alpha_{k-1,0}P_{k-1}(e^{j\omega T}) + \alpha_{k,0}(e^{j\omega T})\,P_{k-2}(e^{j\omega T})}{\alpha_{k-1,0}Q_{k-1}(e^{j\omega T}) + \alpha_{k,0}(e^{j\omega T})\,Q_{k-2}(e^{j\omega T})},$$

справедливой при всех $k \geqslant 2$. При этом $P_0(e^{j\omega T})/[Q_0 \times \times (e^{j\omega T})] = 0/1$; $P_1(e^{j\omega T})/[Q_1(e^{j\omega T})] = \alpha_{10}/\alpha_{00}$.

Величину погрешности, возникающую при понижении порядка передаточной функции, можно оценить при помощи неравенства

$$|K(e^{j\omega T}) - K_1(e^{j\omega T})| \leqslant 1/[\sqrt{5}Q_k^2(e^{j\omega T})].$$

По данному методу можно найти выражения для коэффициентов упрощенной модели передаточной функции (3.6) через коэффициенты передаточной функции (3.5) в общем виде при любых значениях m, n, s, r, т. е. можно последовательно понижать порядок передаточной функции(3.5) на единицу.

Рассмотрим цифровой фильтр для системы идентификации, рабочий сигнал которой представляется последовательностью радиоимпульсов длительностью $t_и$, следующих с периодом повторения $T_и > t_и$. Радиоимпульс на интервале $t = t_и$ достаточно точно описывается аналитическим выражением

$$S_и(t) = A_m \cos \Omega t \cos \omega t.$$

Работа цифрового фильтра описывается линейным разностным уравнением

$$y[nT] = \sum_{i=1}^{m} A_i X[nT - iT] \mp \sum_{i=1}^{n} B_i y[nT - iT]. \quad (3.10)$$

Нерекурсивный фильтр, $B_i = 0$ в уравнении (3.10), не может быть использован для фильтрации разрывной последовательности импульсов с периодом повторения $T_и \gg t_и$ вследствие очистки регистров хранения

предыдущих значений входного сигнала нулевыми значениями, соответствующими интервалу времени $t_и$ входного сигнала. При использовании рекурсивного фильтра (даже при полной очистке регистра хранения предыдущих значений входного сигнала) на выход фильтра будут поступать значения выходного сигнала, полученные сложением предыдущих значений выходного сигнала, умноженных на коэффициент, соответствующий элементу задержки.

Таким образом, для фильтрации заданной последовательности разрывных импульсов необходимо использовать рекурсивный ЦФ, структура которого учитывает запаздывание импульсов. Проектируемый цифровой фильтр должен иметь линейную фазовую характеристику, что соответствует расположению нулей и полюсов передаточной функции на единичной окружности (расположение полюсов на границе устойчивости является признаком резонанса в системе).

Описанные в литературе методы синтеза рекурсивных фильтров во временной области позволяют синтезировать фильтры с хорошими временными характеристиками и менее качественными частотными характеристиками. Фильтры, синтезированные в частотной области, обладают хорошими частотными и худшими временными характеристиками. Кроме того, большинство из разработанных методов синтеза в частотной области основано на дискретизации предварительно рассчитанных аналоговых фильтров, в результате чего часто возникают отклонения полученных характеристик от проектируемых.

Выполнение всех требований, предъявляемых к проектируемому фильтру, возможно при использовании классического метода синтеза передаточной функции, определяемой как отношение изображения выходного сигнала к изображению входного:

$$W(z) = Y(z)/X(z). \qquad (3.11)$$

Для определения z-преобразования входного сигнала необходимо определить изображение одного радиоимпульса, а затем изображение периодической последовательности импульсов, для чего можно воспользоваться методикой определения изображения Лапласа непериодических разрывных функций.

Если z-преобразование непрерывной последовательности радиоимпульсов определяется выражением

$$z\{A_{m_{\text{вх}}}\cos^2\Omega t\cos\omega t\} =$$

$$= \frac{A_{m_{\text{вх}}}}{4}\,\frac{a_6z^6 - a_5z^5 + a_4z^4 - a_3z^3 + a_2z^2 - a_1z}{b_6z^6 - b_5z^5 + b_4z^4 - b_3z^3 + b_2z^2 - b_1z + b_0} =$$

$$= \frac{A_{m_{\text{вх}}}}{4}S(z),$$

где a_i, b_i — постоянные коэффициенты, представляющие собой периодические функции периода квантования T, а изображение смещенной на длительность импульса $t_{\text{и}} = kT$, где k — количество целых периодов, непрерывной последовательности имеет вид

$$z_{\text{см}}\{A_{m_{\text{вх}}}\cos^2\Omega t\cos\omega t\} = \frac{A_{m_{\text{вх}}}}{4}z^{-k}S(z),$$

то изображение одного радиоимпульса

$$z_1\{A_{m_{\text{вх}}}\cos^2\Omega t\cos\omega t\} = z\{A_{m_{\text{вх}}}\cos^2\Omega t\cos\omega t\} -$$

$$- z_{\text{см}}\{A_{m_{\text{вх}}}\cos^2\Omega t\cos\omega t\} = \frac{A_{m_{\text{вх}}}}{4}(1 - z^{-k})S(z).$$

На основании теоремы запаздывания оригиналов z-преобразование входного сигнала, представляющего собой периодическую последовательность импульсов, принимает вид

$$z_{\text{вх}}\{A_{m_{\text{вх}}}\cos^2\Omega t\cos\omega t\} =$$

$$= \frac{A_{m_{вх}}}{1} \frac{z^M - z^{M-k}}{z^M - 1} S(z) = X(z), \qquad (3.12)$$

а изображение выходного сигнала, представляющего собой гармониче кое колебание,

$$z_{вых}\{A_{m_{вых}} \sin \omega t\} = A_{m_{вых}} \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} = Y(z). \qquad (3.13)$$

Таким образом, передаточная функция цифрового фильтра на основании выражений (3.11) — (3.13) определяется следующим выражением:

$$W(z) = k\left(\frac{z^M - 1}{z^M - z^{M-k}}\right) \times$$

$$\times \frac{A_6 z^6 - A_5 z^5 + A_4 z^4 - A_3 z^3 + A_2 z^2 - A_1 z + A_0}{B_7 z^7 - B_6 z^6 + B_5 z^5 - B_4 z^4 + B_3 z^3 - B_2 z^2 + B_1 z^1 - B_0}. \qquad (3.14)$$

Сомножитель $(z^M - 1)/(z^M - z^{M-k})$ в выражении для передаточной функции определяет запаздывание импульсов во входном сигнале.

Цифровой фильтр с передаточной функцией (3.14) физически нереализуем, так как оператор z-преобразования в положительной степени указывает на зависимость выходного сигнала фильтра от последующих значений входного и выходного сигналов. Разделив выражение (3.14) на z в максимальной степени, получим физически реализуемую передаточную функцию

$$W(z) =$$

$$= k \frac{(1 - z^{-M})}{(1 - z^{-k})} \frac{A_6 z^{-1} - A_5 z^{-2} + A_4 z^{-3} - A_3 z^{-4} + A_2 z^{-5} - A_1 z^{-6} + A_0 z^{-7}}{B_7 - B_6 z^{-1} + B_5 z^{-2} - B_4 z^{-3} + B_3 z^{-4} - B_2 z^{-5} + B_1 z^{-6} - B_0 z^{-7}}, \qquad (3.15)$$

где M — количество целых периодов квантования, укладывающихся на период повторения входного сигнала $T \leqslant M\Delta t \leqslant T + 1$; k — количество целых периодов непрерывной последовательности $t_n = kT$.

Используя определение передаточной функции и учитывая, что z-преобразование последовательности,

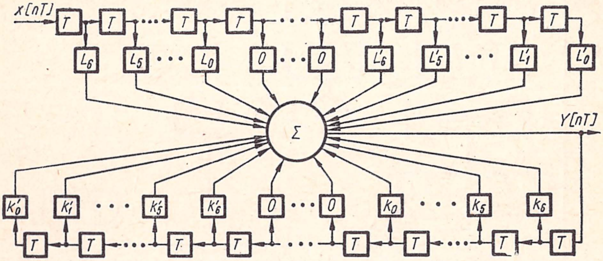


Рис. 13. Блок-схема алгоритма вычислений, необходимых для определения значения выходного сигнала.

задержанной на i выборок, равно z-преобразованию исходной последовательности, умноженной на z^{-i}, записываем разностное уравнение, описывающее работу проектируемого фильтра:

$$y[nT] = L_6 x[nT - T] + \cdots + L_0 x[nT - 7T] +$$
$$+ L'_6 x[nT - (M+1)T] + \cdots + L'_0 x[nT -$$
$$-(M+7)T] + k_6 y[nT - T] + \cdots + k_0 y[nT - 7T] +$$
$$+ k'_7 y[nT - kT] + \cdots + k' y[nT - (k+7)T]. \quad (3.16)$$

Алгоритм определения каждого значения выходного сигнала, соответствующий разностному уравнению (3.16) и передаточной функции (3.15) и составленный по способу прямого программирования, показан на рис. 13. Блок-схема алгоритма моделирования данного фильтра показана на рис. 14.

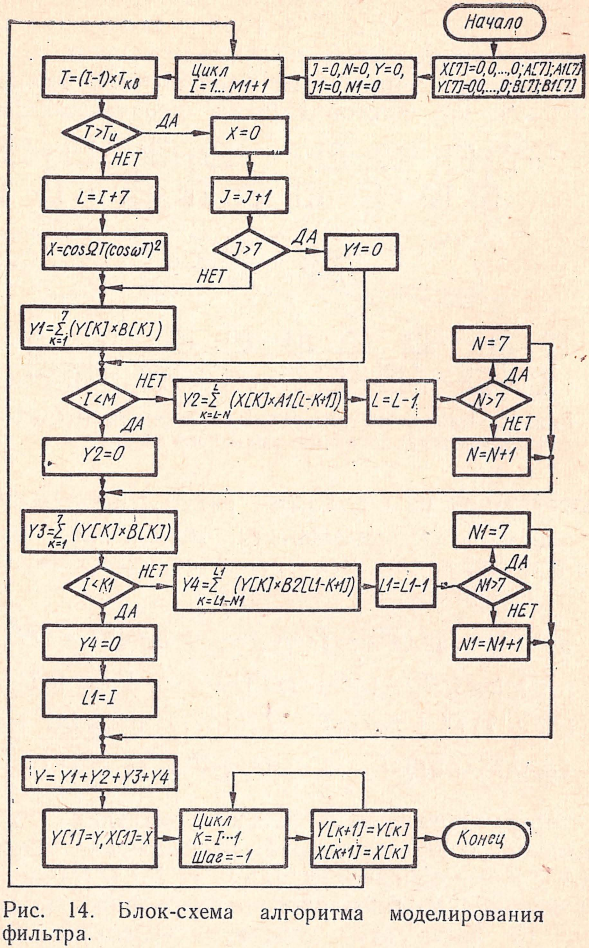


Рис. 14. Блок-схема алгоритма моделирования фильтра.

Если принять, что M и k целые числа, то можно $(1-z^{-M})$ и $(1-z^{-k})$ разложить:

$$1-z^{-M}=(1-z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-M+1});$$

$$1-z^{-k}=(1-z^{-1})(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-k+1}),$$

в результате чего получим

$$W(z^{-1})=k\frac{\begin{matrix}(1+z^{-1}+\cdots+z^{-M+1})(A_6z^{-1}-A_5z^{-2}+\\+A_4z^{-3}-A_3z^{-4}+A_2z^{-5}-A_1z^{-6}+A_0z^{-7})\end{matrix}}{\begin{matrix}(1+z^{-1}+\cdots+z^{-k+1})(B_7-B_6z^{-1}+B_5z^{-2}+\\+B_4z^{-3}+B_3z^{-4}-B_2z^{-5}+B_1z^{-6}+B_0z^{-7})\end{matrix}}.$$

Если выполним умножение полиномов и сделаем переход от $W(z^{-1})$ к $W(z)$, то получим

$$W(z)=k\frac{\begin{matrix}A'_{M+6}z^{k+6}+A'_{M+5}z^{k+5}+A'_{M+4}z^{k+4}+\cdots\\\cdots+A'_{M-i}z^{k-i}+\cdots+A'_1z^{k-M+1}+A'_0z^{k-M}\end{matrix}}{\begin{matrix}B'_{k+7}z^{k+7}+B'_{k+6}z^{k+6}+\cdots+B'_{k-i}z^{k-i}+\cdots\\\cdots+B'_1z+B'_0\end{matrix}}.$$

Коэффициенты со штрихами вычисляем по формулам:

1) для $k=M$

$$A'_{6+(k-1)-i}=\sum_{l=0}^{k-1}A_{6(i-l)};\quad B'_{7+(k-1)-j}=\sum_{l=0}^{k-1}B_{7-(j-l)},$$

где $i=0,1,2,\ldots,[7+(k-1)]$; $j=0,1,2,\ldots,[6+(k-1)]$. Если $(i-l)<0$ и $7-(i-l)<0$, то $A_{6-(i-l)}=B_{7-(i-l)}=0$;

2) для $k\neq M$ и $k>M$ $A'_{6(k-1)-j}$.

Имея выражение для коэффициентов передаточной функции как некоторых периодических функций периода квантования, можно, варьируя частотой квантования, корректировать частотные характеристики фильтра. В данном случае условие резонанса в системе

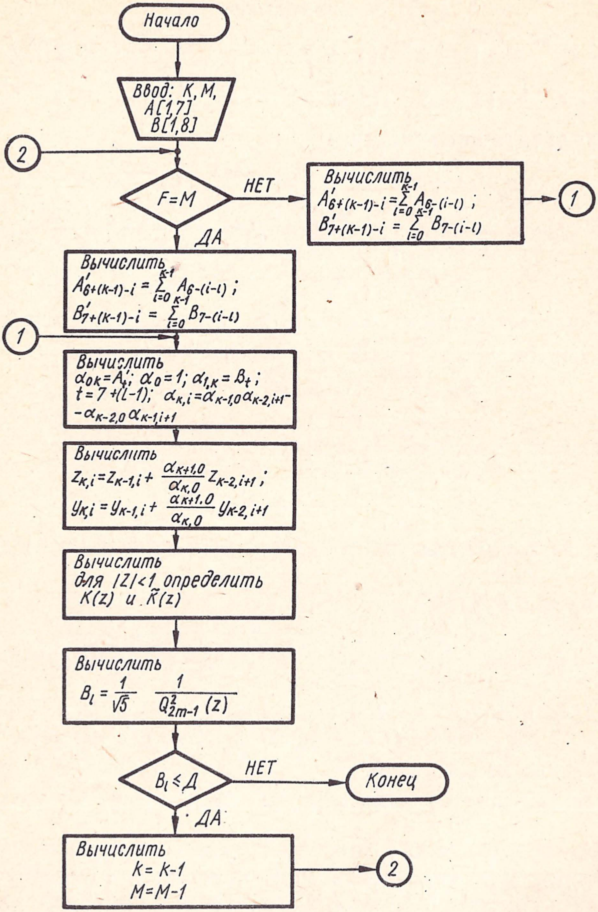


Рис. 15. Алгоритм упрощения передаточной функции путем понижения ее порядка.

определяется самим подходом к синтезу передаточной функции. Кроме того, условию резонанса соответствует расположение полюсов на единичной окружности, что является условием линейности фазовой характеристики фильтра.

Представленный пример требует большого числа вычислительных операций и поэтому задачи такого рода удобнее решать на ЦВМ. Общий алгоритм решения порядка $K(z)$ показан на рис. 15. По этому алгоритму может быть успешно решена задача сокращения $W(z)$ при фиксированных k и M.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД

Представим модель дискретного во времени стационарного фильтра

$$x(j+1) = \Phi x(j) + \Delta U(j) \tag{3.17}$$

в виде разбиения

$$\begin{bmatrix} x_1(j+1) \\ x_2(j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(j) \\ x_2(j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} U(j). \tag{3.18}$$

Здесь Φ и Δ — $n \times n$ и $n \times m$ постоянные матрицы; U — m-мерный вход системы; x — n-мерный вектор, состоящий из l-мерного вектора x_1 и $(n - l)$-мерного вектора x_2.

Необходимо построить упрощенную модель

$$x_1(j+1) = \Phi_R x_1(j) = \Delta_R U(j) \tag{3.19}$$

заданного порядка l, в которой подлежат определению матрицы соответствующих порядков Φ_k и Δ_k.

Известно, что существует $n \times n$ матрица M, которая позволяет преобразовать уравнение (1.14) к жордановой канонической форме [31]. Запишем это преобразование в виде $x(j) = Mz(j)$ и в блочной

форме

$$\begin{bmatrix} x_1(j) \\ x_2(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Z_1(j) \\ Z_2(j) \end{bmatrix}, \qquad (3.20)$$

где Z — канонический вектор состояния, а векторы Z_1 и Z_2 имеют размерность l и $n - l$ соответственно.

Столбцы матрицы M будем считать упорядоченными слева направо в порядке убывающей значимости соответствующих собственных значений переходной матрицы Ф. Это всегда можно сделать подходящей перестановкой столбцов. Так как система (3.17) предполагается устойчивой, то все собственные значения Ф лежат в единичном круге. Следовательно, столбцам, расположенным слева, соответствуют собственные значения Ф, лежащие ближе к единице (по абсолютной величине), а расположенным справа — лежащие ближе к нулю. Если Ф имеет n различных собственных значений, то столбцами M являются собственные векторы Ф, а M называется модельной матрицей. Подставив выражение (3.20) в уравнение (3.18), получим систему в жордановой канонической форме

$$\begin{bmatrix} Z_1(j+1) \\ Z_2(j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1(j) \\ Z_2(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} U(j); \qquad (3.21)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \Phi M \text{ и } \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = V\Delta, \qquad (3.22)$$

где α — блочно-диагональная матрица; δ — матрица;

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

— блочное представление обратной матрицы M^{-1}.

Вследствие предполагаемого упорядочения столбцов преобразования M жордановая каноническая матрица α имеет следующую структуру: в ее левом верх-

нем блоке α_1 размера $l \times l$ сосредоточены собственные значения Φ, расположенные ближе к единице, а в $(n - l) \times (n - l)$ блоке α_2 сосредоточены собственные значения, расположенные ближе к нулю. Из сказанного и уравнения (3.21) заключаем, что канонические координаты Z_1 характеризуют медленное движение систем, а Z_2 — быстрое, т. е. после приложения входного возмущения координаты Z_2 стремятся к своим установившимся значениям быстрее, чем координаты Z_1. Из уравнения (3.21) видно, что движения, характеризуемые координатами Z_1 и Z_2, не связаны. Для систем с линейно независимыми собственными векторами α является диагональной матрицей и поэтому Z_1 и Z_2 всегда будут несвязанными. Если же число линейно независимых собственных векторов меньше n, то представление исходной системы в матричной форме в виде выражения (3.18) следует производить так, чтобы не расщеплялись жордановые блоки α; тогда Z_1 и Z_2 остаются независимыми.

Для решения поставленной задачи сокращения размерности дискретной модели воспользуемся подходом Маршалла [31], который применяется для решения аналогичной задачи в пространстве непрерывного времени. Идея этого метода состоит в пренебрежении динамикой быстрого движения в исходной модели высокого порядка. Для координаты x_i из уравнения (3.18) имеем

$$x_1(j+1) = \Phi_1 x_1(j) + \Phi_2 x_2(j) + \Delta_1 U(j). \quad (3.24)$$

Выражение для $x_2(j)$ можно получить, комбинируя уравнения (3.19) и (3.23):

$$x_2(j) = V_4^{-1}\,[Z_2(j) - V_3 x_1(j)].$$

Реакция координаты Z_2 на входное возмущение оказывается более быстрой, чем реакция координаты Z_1, так как собственные значения блока α_2 расположе-

ны ближе к нулю, чем собственные значения блока α_1. В качестве приближения предположим, что $Z_2(j)$ немедленно достигает нового установившегося состояния, т. е. обладает мгновенной реакцией. Тогда из уравнения (3.24) получаем

$$Z_2(j+1) = Z_2(j) = (1-\alpha_2)^{-1}\delta_2 U(j). \qquad (3.25)$$

Объединяя теперь уравнения (3.24) и (3.25), находим модель системы пониженного порядка, где

$$\Phi_R = \Phi_1 - \Phi_2 V_4^{-1} V_3; \qquad (3.26)$$

$$\Delta_R = \Delta_1 + \Phi_2 V_4^{-1}(I-\alpha_2)^{-1}\delta_2. \qquad (3.27)$$

При постоянных входах координаты x_1 исходной и упрощенной системы достигают одного и того же установившегося значения.

Другой метод анализа непрерывных систем, предложенный Дэвисоном [31], основан на предположении, что вклад несущественных собственных значений исходной системы в ее реакцию незначителен и им можно пренебречь. Решение записывается в следующем виде:

$$x(j+1) = \Phi^j x(0) + \sum_{k=0}^{j-1} \Phi^k \Delta U(k),$$

где $x(0)$ — начальное состояние системы.

Следуя Дэвисону, рассмотрим случай, когда $x(0) = 0$. Тогда

$$x(j+1) = \sum_{k=0}^{j-1} \Phi^k \Delta U(k). \qquad (3.28)$$

Используя преобразование (3.22), выражение (3.28) можно переписать в следующем виде:

$$x(j+1) = M\left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha^k M^{-1} \Delta U(k)\right).$$

После разбиения это уравнение принимает форму

$$\begin{bmatrix} x_1(j+1) \\ x_2(j+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \left[\sum_{k=0}^{j-1} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1^k & 0 \\ 0 & \alpha_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} \Delta U_k \right\} \right]. \quad (3.29)$$

Предположим, что собственные значения α_2 не оказывают существенного влияния на реакцию системы, а потому ими можно пренебречь (т. е. $\alpha_2 = 0$). Уравнение (3.29) в результате упрощается:

$$\begin{bmatrix} x_1(j+1) \\ x_2(j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \left[\sum_{k=0}^{j-1} \{\alpha_1^k (V_1 V_2) \Delta U(k)\} \right]. \quad (3.30)$$

Определим $l \times 1$ вектор $\xi = \sum_{k=0}^{j=1} \{(\alpha_1^k)(V_1 V_2) \Delta U(k)\}$ и, подставив его в уравнение (3.30), получим

$$\begin{bmatrix} x_1(j+1) \\ x_2(j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \xi.$$

После преобразований из последнего уравнения получаем

$$\xi = M_1^{-1} x_1(j+1);$$

$$x_2(j+1) = M_3 M_1^{-1} x_1(j+1). \quad (3.31)$$

Для вычисления Φ_k подставим выражение (3.31) в невозмущенное уравнение (3.24), т. е. примем в нем $U(j) = 0$:

$$x_1(j+1) = (\Phi_1 + \Phi_2 M_3 M_1^{-1})\, x_1(j), \quad (3.32)$$

тогда $\Phi_R = \Phi_1 + \Phi_2 M_3 M_1^{-1}$.

Для вычисления Δ_k сравним решения исходной и упрощенной моделей при $x(0) = 0$. Если прене-

бречь α_2, то решением исходной модели будет

$$x_1(j+1) = M_1\left(\sum_{k=0}^{j-1}\{\alpha_1^k(V_1\Delta_1+V_2\Delta_2)U(k)\}\right), \quad (3.33)$$

а решением упрощенной —

$$x_1(j+1) = \sum_{k=0}^{j=1}\{\Phi_R^k\Delta_R U(k)\}.$$

Используя соотношения $\Phi = M\alpha V$ и $VM = I$, можно показать, что $\Phi_R = M_1\alpha_1 M_1^{-1}$, в результате чего решение упрощенной модели принимает вид

$$x_1(j+1) = M_1\left(\sum_{k=0}^{j-1}\{\alpha_1^k M_1^{-1}\Delta_R U(k)\}\right). \quad (3.34)$$

Сравнивая уравнения (3.33) и (3.34), получаем

$$\Delta_R = M_1(V_1\Delta_1 + V_2\Delta_2) = M_1\delta_1. \quad (3.35)$$

При разбиении на блоки выражения $VM = I$ переходная матрица из уравнения (3.32) эквивалентна переходной матрице (3.26), полученной методом Маршалла.

Рассмотрим задачу преобразования непрерывной модели высокого порядка в дискретную модель низкого порядка. Пусть модель физической системы представлена в виде системы линейных дифференциальных уравнений

$$X = AX + BU. \quad (3.36)$$

Для решения поставленной задачи можно предложить два подхода. Согласно первому непрерывная модель высокого порядка (3.36) преобразуется в непрерывную модель более низкого, а уже от нее производится переход к дискретной модели низкого порядка вида (3.19). В соответствии же со вторым подходом поступают наоборот — аппроксимируют непрерыв-

ную модель (3.36) дискретной моделью высокого порядка (3.17), а затем, используя изложенный выше метод, переходят к дискретной модели низкого порядка (3.19). Для полноты изложения приведем методы Маршалла и Дэвисона понижения порядка непрерывных систем, которые используются в первом подходе.

Известно, что существует матрица M [31], преобразующая уравнение к жордановой канонической форме:

$$x = MZ; \quad \dot{Z} = JZ + PU = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} U,$$

где $J = M^{-1}AM$; $P = M^{-1}B = VB$.

Как и в случае дискретного времени для получения упрощенной модели, уравнение (3.36) следует представить в блочном виде типа уравнения (3.18). Далее необходимо упорядочить столбцы матрицы M. Теперь столбцы слева должны соответствовать собственным значениям матрицы A с действительными частями, расположенными ближе к нулю, а столбцы справа — собств нным значениям A, действительная часть которых ближе к $-\infty$. В результате получается непрерывная модель пониженной размерности $\dot{x}_1 = A_R x_1 + B_R U$, где по методу Маршалла

$$A_R = M_1 J_1 M_1^{-1}; \tag{3.37}$$

$$B_R = B_1 - A_2 V_4^{-1} J_2^{-1} P_2, \tag{3.38}$$

а по методу Дэвисона

$$A_R = A_1 + A_2 M_3 M_1^{-1}; \tag{3.39}$$

$$B_R = M_1 P_1. \tag{3.40}$$

Рассмотренные подходы различаются между собой порядком шагов сокращения размерности и дискретизации. Так как шаги содержат только линейные

операции, то можно ожидать, что указанные подходы приводят к эквивалентным результатам. Эту эквивалентность можно показать аналитически, если использовать соотношения

$$\Phi = \exp(AT); \quad \Delta = \int_0^T \exp(A(T-\tau))Bd\tau \quad (3.41)$$

и выразить Φ_R и Δ_R через A_R и B_R по формулам

$$\Phi_R = \exp(A_R T); \quad \Delta_R = \int_0^T \exp(A_R(T-\tau))B_R d\tau.$$

Для сравнения результатов дискретного и непрерывного подходов к упрощению модели высокой размерности можно воспользоваться представлением выражений $\Phi = M\alpha V$ и $MV = I$ и показать, что дискретная переходная матрица в выражении (3.26) эквивалентна

$$\Phi_R = \Phi_1 - \Phi_2 V_4^{-1} V_3 = M_1 \alpha_1 M_1^{-1}. \quad (3.42)$$

Учитывая это и сравнивая уравнения (3.42) и (3.37), (3.38) и (3.27), (3.32) и (3.39), (3.35) и (3.40), замечаем, что имеется прямое почленное соответствие между результатами дискретного и непрерывного методов понижения размерности модели.

Пример 3. Дана непрерывная система второго порядка

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U, \quad (3.43)$$

которую желательно аппроксимироваать одномерной системой относительно x_1. Собственными значениями матрицы системы (3.43) являются —1 и —4, так что

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}; M = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 4/3 \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Модель эквивалентности дискретной системы с периодом T имеет

вид

$$x(j+1)=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4\exp(-T)-\exp(-4T), & \exp(-T)-\exp(-4T)\\ -4\exp(-T)+4\exp(-4T), & -\exp(-T)+4\exp(-4T)\end{bmatrix}\times$$

$$\times x(j)+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}{}^3/_4-\exp(-T)+{}^1/_4\exp(-4T)\\ \exp(-T)-\exp(-4T)\end{bmatrix}\times U(j). \quad (3.44)$$

Уравнение (3.44) имеет собственные значения $\exp(-T)$ и $\exp(-4T)$.

Вначале для аппроксимации непрерывной двумерной системы (3.43) дискретной одномерной моделью воспользуемся первым подходом и методом Маршалла. Используя уравнения (3.37) и (3.38), получаем

$$A_R=M_1J_1M_1^{-1}=-1;\quad B_R=B_1-A_2V_4^{-1}J_2^{-1}P_2={}^1/_4.$$

Таким образом, непрерывная модель имеет вид

$$\dot{x}_1=-x_1+U/4,$$

а соответствующая ей дискретная модель

$$x_1(j+1)=\exp(-T)\,x_1(j)+[1-\exp(T)]\,U(j)/4. \quad (3.45)$$

Если же воспользоваться вторым подходом сокращения размерности, то из уравнений (3.26), (3.27) и (3.44) найдем

$$\Phi_R=\Phi_1-\Phi_2V_4^{-1}V_3=\exp(-T);$$

$$\Delta_R=\Delta_1+\Phi_2V_4^{-1}(I-\alpha_2)^{-1}\,\delta_2=[1-\exp(-T)]/4.$$

В этом случае дискретная модель имеет вид

$$x_1(j+1)=\exp(-T)\,x_1(j)+[1-\exp(T)]\,U(j)/4,$$

т. е. она идентична модели (3.45), полученной с помощью первого метода.

Решим эту задачу с помощью метода Дэвисона

При первом подходе из уравнений (3.39) и (3.40) имеем

$$A_R = A_1 + A_2 M_3 M_1^{-1} = -1; \quad B_R = M_1 P_1 = {}^1/_3.$$

В этом случае непрерывная модель первого порядка получается

$$\dot{x}_1 = -x_1 + U/3,$$

а соответствующая ей дискретная модель

$$x_1(j+1) = \exp(-T)\, x_1(j) + [1 - \exp(-T)]\, U(j)/3.$$

При втором подходе с помощью уравнений (3.32), (3.35) и (3.44) находим

$$\Phi_R = \Phi_1 + \Phi_2 M_3 M_1^{-1} = \exp(-T);$$

$$\Delta_R = M_1(V_1 \Delta_1 + V_2 \Delta_2) = [1 - \exp(-T)]/3,$$

чему соответствует одномерная дискретная модель

$$x(j+1) = \exp(-T)\, x_1(j) + [1 - \exp(T)]\, U(j)/3,$$

совпадающая с моделью (3.45).

3. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ В БАЗИСЕ УОЛША

Кроме рассмотренного дискретного преобразования Фурье, большое значение для цифровой обработки сигналов представляет дискретное преобразование Уолша (ДПУ), которое может быть определено следующим образом [6].

Рассмотрим конечную аппроксимацию случайного процесса $x(t)$

$$x_N(t) = \sum_{l=0}^{N-1} x_l \varphi_l(t), \qquad (3.46)$$

где $\varphi_l(t)$ — набор ортогональных функций; x_l — со-

ответствующий коэффициент Фурье для данного процесса.

Если рассмотреть процесс (3.46) в дискретные моменты времени в точках $t = 0,\ T/N,\ \ldots,\ (N - 1/N)\ T$, T — интервал наблюдения, то получим набор дискретных значений случайного процесса $x\left(j\,\frac{T}{N}\right)$, который обозначим $f\,(j)$, и дискретных функций $\varphi_l\,(j)$, $j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_l(j)\,\varphi_k(j) = \begin{cases} N & \text{при } l = k; \\ 0 & \text{при } l \neq k,\ \varphi_k(j) = \varphi_j(k). \end{cases} \qquad (3.47)$$

Исходя из рассмотренных вводных определений, сформулируем прямое и обратное дискретные преобразования соответственно:

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\,\varphi_k(j); \qquad (3.48)$$

$$f(j) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\,\varphi_j(k), \qquad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1. \qquad (3.49)$$

Среди набора дискретных ортогональных функций очень удобным является набор дискретных функций Уолша, которые определяются следующим образом:

$$\mathrm{wal}(0, j) = 1 \quad \text{для } j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1;$$

$$\mathrm{wal}(1, j) = \begin{cases} 1 & \text{для } j = 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2} - 1; \\ -1 & \text{для } j = \frac{N}{2},\ \frac{N}{2} + 1,\ \ldots,\ N - 1, \end{cases}$$

где $N = 2p$, p — натуральное число.

Последующие функции набора получаем по рекуррентной формуле вида

$$\mathrm{wal}(k, j) = \begin{cases} \mathrm{wal}(2[k/2],\ j) = \mathrm{cal}(k, j); \\ \mathrm{wal}(k - 2[k/2],\ j) = \mathrm{sal}(k, j), \end{cases}$$

где [ ] — функция entier.

Если для функции Уолша выполняются соотношения (3.47) — (3.49), то прямое дискретное преобразование Уолша принимает вид

$$F(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j)\,\mathrm{wal}(k, j),$$

а обратное

$$f(j) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\,\mathrm{wal}(k, j) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k)\,\mathrm{wal}(j, k),$$

$$\text{где } f(0) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k), \text{ а } F(0) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(j).$$

Используя определение так называемой логической свертки, можно определить следующую величину:

$$L_N(j) = f(j) * f(j) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(j \oplus m) f(m),$$

где L_N — логическая свертка; $*$ — символ свертки; $\oplus$ — сумма по модулю двух соответствующих битов двоичного разложения чисел j и m.

После преобразований получаем соотношение

$$L_N(j) = \sum_{k=0}^{N-1} (F(k))^2\,\mathrm{wal}(k,j), \qquad (3.50)$$

аналогичное результатам, полученным в теории Винера — Хинчина, где $L_N(j)$ является аналогом функции автокорреляции, а $(F(k))^2$ — аналогом функции мощности спектральной плотности.

Если обозначить $(F(k))^2 = P(k)$, то обратное преобразование

$$P(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} L_N(j) \operatorname{wal}(k, j).$$

При $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ $P(k) \geqslant 0$ и $L_N(0) = \sum_{k=0}^{N-1} P(k)$, где $L_N(0)$ представляет полную мощность последовательности f_m.

Рассмотрим простейшую задачу фильтрации полезного сигнала на фоне помехи типа «белый шум» — $\zeta(t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Предположим, что полезный сигнал неизвестной формы можно приближенно представить отрезком Фурье по функциям Уолша

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_k(t), \qquad (3.51)$$

где c_k — случайные величины с начальными моментами второго порядка R_{kl}.

Переходя к дискретному времени t_r — $r = 1, 2, \ldots, N$, имеем вектор замера процесса $X^T = [x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)]$, где $x(t_r) = s(t_r) + \zeta(t_r)$.

Преобразуем вектор-столбец x по Адамару: $x^* = HX$, где H — матрица Адамара размером $N \times N$, а $N = 2^n$, причем $n = 1, 2, \ldots$

Необходимо с помощью диагональной матрицы $Q = \operatorname{diag}\{q_{rl}\}$ так трансформировать спектр X^*, чтобы при обратном преобразовании вектора QX^* иметь оценку вектора $\hat{S}^T = [\hat{s}(t_1), \hat{s}(t_2), \ldots, \hat{s}(t_N)]$, наиболее близкую (в среднеквадратическом смысле) к требуемому вектору $S^T = [s(t_1), s(t_2), \ldots, s(t_N)]$. Выражение для

вектора ошибки фильтрации

$$e = S - HQX^*/N \tag{3.52}$$

преобразуем к виду

$$e = [HC - HQH(S + Z)]/N =$$
$$= [HC - HQC - HQHZ]/N = [(H - HQ)C - HQHZ]/N$$

при условии, что $C^T = [c_0, c_1, c_2, \dots, c_{N-1}]$ — неизвестный спектр сигнала (3.51); $Z^T = [\zeta(t_1), \zeta(t_2), \dots$ $\dots, \zeta(t_N)]$ — вектор шума.

Найдем выражение для ковариационной матрицы ошибок оценок $M\{ee^T\}$, где M — оператор математического ожидания (осреднения по реализации). Определим сначала матрицу для одной реализации

$$ee^T = [(H - HQ)C - HQHZ][(H - HQ)C -$$
$$- HQHZ]^T/N^2 = [(H - HQ)C - HQHZ][C^T(H - HQ) -$$
$$- Z^T(HQH)^T]/N^2 = [(H - HQ)CC^T(H - HQ)^T -$$
$$- (H - HQ)CZ^T(HQH)^T - HQHZC^T(H - HQ)^T +$$
$$+ HQHZZ^T(HQH)^T]/N^2. \tag{3.53}$$

Полагая, что случайные величины c_i и $\zeta(t_j)$ некоррелированы, найдем

$$M\{ee^T\} = M\{(H - HQ)CC^T(H - HQ)^T\}/N^2 +$$
$$+ M\{HQHZZ^T(HQH)^T\}/N^2. \tag{3.54}$$

Если считать, что известны корреляционные матрицы в виде

$$R_c = \begin{bmatrix} R^c_{00}R^c_{01} & \dots & R^c_{0(N-1)} \\ R^c_{10}R^c_{11} & \dots & R^c_{1(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ R^c_{(N-1)0} & \dots & R^c_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{c_0^2 c_0 c_1} & \dots & \overline{c_0 c_{N-1}} \\ \overline{c_1 c_0 c_1^2} & \dots & \overline{c_1 c_{N-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{c_{(N-1)} c_0} & \dots & \overline{c_{N-1}^2} \end{bmatrix}; \qquad (3.55)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} R_{00}^z R_{01}^z & \dots & R_{0(N-1)}^z \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{(N-1)0}^z & \dots & R_{(N-1)(N-1)}^z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{[\zeta(t_1)]^2} & \overline{\zeta(t_1)\zeta(t_2)} \dots & \overline{\zeta(t_1)\zeta(t_N)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{\zeta(t_1)\zeta(t_2)} & \dots & \overline{[\zeta(t_N)]^2} \end{bmatrix}, \qquad (3.56)$$

то в выражении (3.54) определению подлежат только элементы матрицы Q, которые находятся путем минимизации величин ковариационной матрицы ошибок $M\{ee^T\}$.

В матрицах (3.55) и (3.56) черта сверху означает операцию усреднения по m реализациям. Дифференцируя элементы матрицы $M\{ee^T\}$ по элементам Q — — g_{rr} и приравнивая результат нулю, получаем систему N^2 уравнений для определения

$$\partial [M\{ee^T\}]/\partial g_{rr} = 0, \quad r = 0, \overline{N} - 1.$$

Пример 4. Пусть $N = 2$ и

$$R_c = \begin{bmatrix} R_{00}^c & 0 \\ 0 & R_{11}^c \end{bmatrix}; \quad R_z = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь выражениями (3.53) и (3.54), находим

$$M\{ee^T\} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1 - q_{00})^2 \overline{c_0^2} + (1 - q_{11})^2 \overline{c_1^2}; & (1 - q_{00})^2 \overline{c_0^2} - (1 - q_{11}^2) \overline{c_1^2} \\ (1 - q_{00})^2 \overline{c_0^2} - (1 - q_{11}^2) \overline{c_1^2}; & (1 - q_{00})^2 \overline{c_0^2} + (1 - q_{11})^2 \overline{c_1^2} \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2(q_{00}^2+q_{11}^2)\sigma^2 & 2(q_{00}^2-q_{11}^2)\sigma^2 \\ 2(q_{00}^2-q_{11}^2)\sigma^2 & 2(q_{00}^2+q_{11}^2)\sigma^2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial [M\{ee^T\}]}{\partial q_{00}} = -2(1-q_{00})\bar{c}_0^2 + 4q_{00}\sigma^2 = 0 \\ \dfrac{\partial [M\{ee^T\}]}{\partial q_{11}} = -2(1-q_{11})\bar{c}_1^2 + 4q_{11}\sigma^2 = 0 \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Система уравнений (3.57) получена в результате дифференцирования только одного элемента матрицы $M\{ee^T\}$ — элемента, стоящего на пересечении первой строки и первого столбца. Решая уравнения (3.57), найдем

$$q_{11} = \bar{c}_1^2/(\bar{c}_1^2 + 2\sigma^2) = R_{11}^c/(R_{11}^c + 2\sigma^2). \quad (3.58)$$

Таким образом, если известны матрицы R_c и R_z, то фильтр имеет достаточно простую структуру и расчет его не представляет затруднений. Однако такой случай на практике не встречается. Рассмотрим реальный случай, когда матрицы R_c и R_z неизвестны. Здесь для синтеза фильтра потребуется использовать свойство адаптации. Адаптивный блок фильтра должен обладать памятью: необходимо вначале запомнить m реализаций вектора $x^*(p)$ $(p=\overline{1, m})$. Далее в блоке следует определить и запомнить выборочные средние значения из компонент вектора x^*

$$\bar{x}_i^* = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} x_i^*(p), \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1, \quad (3.59)$$

а затем найти приближенную к R_c матрицу

$$R_{\overline{X^*}} = \begin{bmatrix} (\bar{x}_0^*)^2 & \overline{\bar{x}_0^*\bar{x}_1^*} & \overline{\bar{x}_0^*\bar{x}_2^*} & \ldots & \overline{\bar{x}_0^*\bar{x}_{N-1}^*} \\ \overline{\bar{x}_1^*\bar{x}_0^*} & (\bar{x}_1^*)^2 & \cdots & \ldots & \overline{\bar{x}_1^*\bar{x}_{N-1}^*} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{\bar{x}_{N-1}^*\bar{x}_0^*} & \cdots & \cdots & \ldots & (\bar{x}_{N-1}^*)^2 \end{bmatrix}.$$

Приближением к R_z будет матрица $R_{\hat{z}}$, элементы которой

$$\hat{\zeta}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{m} \hat{\zeta}_{(p)}(t_i)\, \hat{\zeta}_{(p)}(t_j),$$

где $\hat{\zeta}_{(p)}(t_i) = \frac{1}{N} h_i \hat{\zeta}^{*}_{(p)}$; h_i — вектор-строка, компоненты которого равны элементам i-й строки матрицы Адамара, а вектор-столбец

$$\hat{\zeta}^{*}_{(p)} = \begin{bmatrix} \bar{x}^{*}_{0} - x^{*}_{0}(p) \\ \bar{x}^{*} - x^{*}_{1}(p) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}^{*}_{N-1} - x^{*}_{N-1}(p) \end{bmatrix}. \qquad (3.60)$$

Таким образом, совершив обратное преобразование Адамара над вектором (3.60), необходимо для получения $R_{\hat{z}}$ найти корреляцию между полученными компонентами. Чтобы облегчить расчеты элементов $\hat{\zeta}_{ij}$, можно с некоторого номера j считать их нулевыми. Для проверки справедливости такой гипотезы следует воспользоваться аппроксимацией Бартлетта [3], которая для дисперсии $\frac{\hat{\zeta}_{ij}}{\zeta_{ii}}$ $D\left(\frac{\hat{\zeta}_{ij}}{\zeta_{ij}}\right)$ дает

$$D(\hat{\zeta}_{ij}/\hat{\zeta}_{ii}) \approx \frac{1}{m}\left[1 + 2\sum_{v=1}^{q} \zeta^{2}_{iv}/\zeta^{2}_{ii}\right]. \qquad (3.61)$$

Если в выражение (3.61) вместо ζ_{iv} и ζ_{ii} подставить $\hat{\zeta}_{iv}$ и $\hat{\zeta}_{ii}$ и задаться $q < j$, то квадратный корень из полученного числа даст стандартную ошибку, которая не должна превосходить ζ_{ir}/ζ_{ii}, где $r > q$.

Итак, адаптивный цифровой фильтр с памятью выдает первый результат (отфильтрованный неизвестный полезный сигнал), спустя $(mT + t_{сч})$ с, и далее

будет его возобновлять через каждые $T + t_{сч}$ с. Здесь T — время, приходящееся на интервал разложения по функциям Уолша (на интервал 0,1); m — число реализаций, т. е. число повторений интервала (предполагается, что полезный сигнал повторяется на каждом интервале T); $t_{сч}$ — время счета, необходимое для практической реализации описанных вычислений, направленных на получение значений q_{rr}. Если $t_{сч}$ не превосходит T, то фильтр работает в реальном масштабе времени.

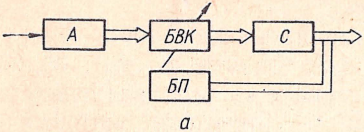
4. АДАПТИВНАЯ ЦИФРОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В БАЗИСЕ ХААРА

По аналогии с фильтрами Уолша можно строить цифровые фильтры Хаара Коэффициентам таких фильтров присваиваются значения элементов строки матрицы преобразования Хаара. Как и в фильтрах Уолша, отношение f_0/f_s приближенно определяется величиной $1/T$ (f_s — частота квантования сигнала, T — период, на котором функции Хаара не равны нулю), поэтому для практического синтеза этих фильтров необходимо заранее снимать их АЧХ и заносить в таблицу. Пользуясь этими таблицами, можно подбирать фильтр с необходимой центральной частотой пропускания, а также количество последовательных однотипных фильтров, необходимое для достижения заданного качества фильтрации.

Адаптивную фильтрацию в базисе Хаара можно проводить по алгоритму, иллюстрируемому структурной схемой (рис. 16, *а*).

На вход блока A подается смесь полезного сигнала и помехи. В блоке A поступивший сигнал разлагается в ряд Хаара, а коэффициенты этого ряда вычисляются методом, описанным ранее. Блок весовых

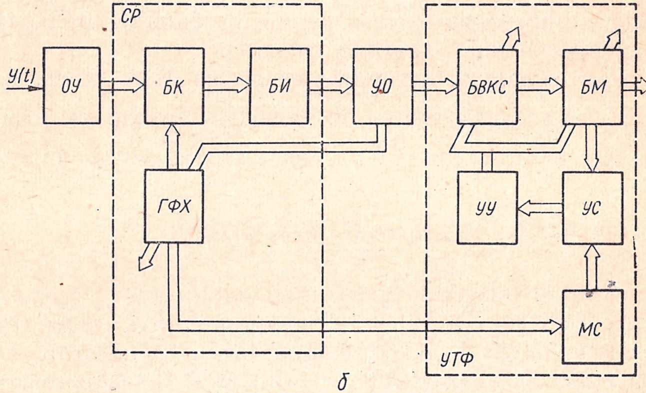
коэффициентов *БВК*, исходя из имеющихся в памяти ЦВМ коэффициентов разложения в ряд Хаара полезного сигнала, умножает коэффициенты Хаара поступившего сигнала таким образом, чтобы на выходе



а

Рис. 16. Адаптивный фильтр:

а — структурная схема в базисе Хаара; *А* — спектр-анализатор Хаара; *БВК* — блок весовых коэффициентов; *С* — синтезатор; *БП* — блок подстройки весовых коэффициентов; *б* — устройство.



б

блока были коэффициенты ряда Хаара полезного сигнала вида

$$a_n^k = \chi_n^k(s)/[\chi_n^k(s+N)],$$

где a_n^k — весовые коэффициенты; $\chi_n^k(s)$ — коэффициенты разложения в ряд Хаара полезного сигнала, хранящиеся в памяти ЦВМ; $\chi_n^k(s+N)$ — коэффициенты Хаара фильтруемого сигнала.

Блок синтеза *С* умножает функции Хаара на поступившие из *БВК* коэффициенты, в результате чего

может быть получен отфильтрованный сигнал. В зависимости от требуемого качества фильтрации, блок подстройки *БП* изменяет весовые коэффициенты.

Рассмотрим пример синтеза устройства фильтрации смеси радиосигнала и помехи в виде «белого шума» и гармонического сигнала.

Структурная схема устройства адаптивной фильтрации в базисе Хаара представлена на рис. 16, *б*. Сигналы и помеха, поступающие на вход адаптивного фильтра, обрабатываются в отсчетном устройстве *ОУ*, предназначенном для получения отсчетов огибающей, и преобразуются к форме, удобной для дальнейшей обработки и анализа сигналов.

Для обнаружения радиосигнала на фоне помех последний раскладывается по базисным функциям Хаара (схема разложения *СР*), где коэффициенты определяются по формуле $a_k = \int_0^1 f(t)\,\chi_k(t)\,dt$.

Для реализации указанной зависимости служат: блок ключей *БК*, блок интеграторов *БИ*, генератор длительностей функций Хаара *ГФХ*. Количество коэффициентов разложения выбирается в зависимости от точности представления сигнала в пространстве базисных функций Хаара. Генератор длительностей функций Хаара управляет временем интегрирования блока интеграторов, на выходе которого получаются значения коэффициентов разложения принятого сигнала, т. е. получаем некоторый вектор $\bar{\beta}$ представления сигнала в пространстве базисных функций Хаара.

Синхронизация временной диаграммы принимаемых сигналов с временной диаграммой адаптивного фильтра осуществляется следующим образом.

Устройство оценки *УО* анализирует полученные ранее компоненты вектора $\bar{\beta}$, в результате чего принимается решение о наличии или отсутствии сигнала в данном отрезке временного интервала. При этом если сигнал не обнаружен, то устройство оценки *УО* выдает команду на сдвиг интервала интегрирования, в противном случае значение компоненты вектора $\bar{\beta}$ поступает на вход следующего устройства. На этом процесс обнаружения заканчивается.

Устройство точной фильтрации сигнала *УТФ* состоит из функциональных блоков (рис. 16, *б*).

Значения элементов вектора $\bar{\beta}$ поступают на вход устройства *БВКС*, представляющего собой набор некоторых матриц $\bar{A}$, элементы которых — значения весовых коэффициентов суммирования.

В устройстве *БВКС* происходит поиск и выделение не искаженных помехой составляющих вектора $\bar{\beta}$, т. е. при умножении β на матрицу $\bar{A}$ получаем новый вектор $\bar{\alpha}$, содержащий только не искаженные помехой компоненты вектора $\bar{\beta}$. При этом выбирается только одна из матриц $\bar{A}$ указанного выше набора. Набор матриц (блок *БМ*) позволяет восстановить искаженные компоненты вектора отфильтрованного сигнала в пространстве базисных функций Хаара.

Устройство сравнения *УС* позволяет получить оценку рассогласования полученных компонент вектора $\bar{\beta}$ с компонентами вектора выходного сигнала модели (устройство *МС*). Величина получаемой в устройстве сравнения ошибки оценивается устройством управления *УУ*, которое выбирает матрицы *A* и *B* таким образом, чтобы сигнал ошибки был минимальным. Модель сигнала *МС* запускается при обнаружении сигнала, т. е. в момент совпадения фазы принимаемого сигнала и начала отсчета функций Хаара [10].

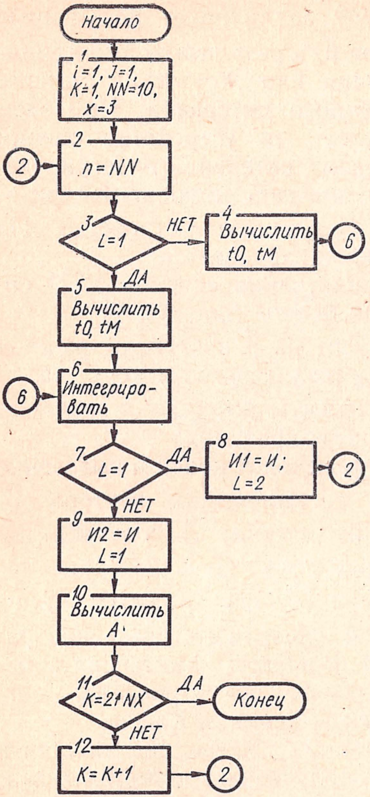


Рис. 17. Блок-схема моделирующего алгоритма адаптивного фильтра при помехе типа «белый шум»:

J — счетчик числа обращений к массиву *P*; *L* — если *L* = 1, то значение функции Хаара равно + χ, если *L* = 2, то значение функции Хаара равно — χ; *NN* — число участков разбиения участков интегрирования; *N* — оставшееся число участков интегрирования; *tM* — конечный участок интегрирования; *K* — номер функции Хаара; *t* — текущее время; *И* — значение интеграла; *И1* — результат интегрирования положительной полуволны функции Хаара; *И2* — результат интегрирования отрицательной полуволны функции Хаара; *A* — коэффициент функции Хаара

С целью проверки работоспособности изложенного выше алгоритма было проведено его частичное моделирование.

Моделировались следующие режимы работы: обнаружение сигнала на фоне «белого шума» и на фоне детерминированной помехи. В качестве генератора «белого шума» была использована программа выделения псевдослучайных чисел с математическим ожиданием, равным 0,11, дисперсией — 1,13, показателем асимметрии — 0,22. В качестве полезного сигнала была выбрана синусоида с частотой колебаний 8 Гц.

На рис. 17 показана схема моделирующего алгоритма при помехе типа «белый шум».

Оператор *1* присваивает начальные значения идентификаторам *L*, *J* Переход к оператору *2* означает выбор нового интервала интегрирования. Оператор *3* — условный. В зависимости от значения *L* выбира-

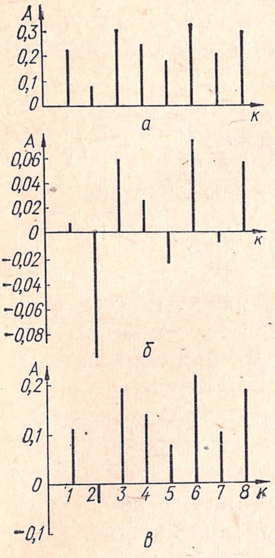


Рис. 18. Разложение в базисе Хаара сигналов:

а — полезный сигнал + «белый шум»; *б* — реализации «белого шума»; *в* — реализации «белый шум» + полезный сигнал.

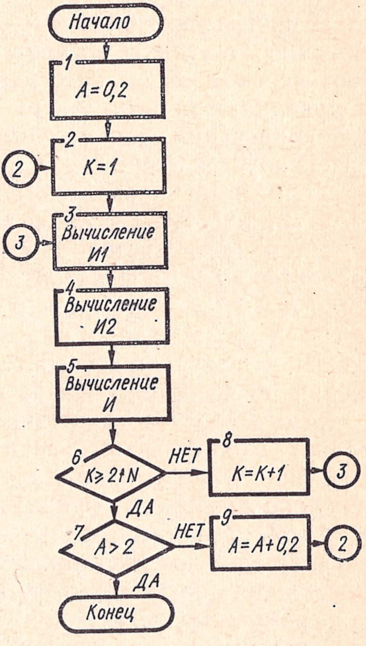


Рис. 19. Блок-схема моделирующего алгоритма адаптивного фильтра при детерминированной помехе.

ются те или иные конечные интервалы интегрирования. Операторы *4* и *5* вычисляют конечные интервалы

интегрирования, т. е. определяют интервал существования функции Хаара Оператор *6* производит интегрирование $U = \int_{t_0}^{M} f(M)\chi(t)\,dt$.

В программе значение t_0 сразу же присваивается значению текущего времени t. Оператор *7* — условный переход. Если интегрировалась положительная полуволна функции Хаара ($L = 1$), то результат интегрирования запоминается (оператор *8*) и затем интегрируется отрицательная полуволна.

Если интегрировалась отрицательная полуволна ($L = 2$), то результат также запоминается (оператор *9*) и затем вычисляется коэффициент функции Хаара (оператор *10*). Оператор *11* — условный переход. Если K максимально, то решение прекращается, если нет — K увеличивается на единицу (оператор *12*) и управление передается оператору *2*. Результаты разложения по функциям Хаара изображены на рис. 18.

Таким образом, синтезированное устройство позволяет фильтровать сигнал. При наличии сигнала коэффициенты функций Хаара приблизительно на порядок больше тех же функций без сигнала.

Моделирование работы устройства обнаружения сигнала при воздействии детерминированной помехи проводилось по алгоритму, показанному на рис. 19. Программы моделирования показаны на рис. 20.

Полезный сигнал представлен синусоидой с частотой 8 Гц, а аддитивная помеха — синусоидой с частотой 1 Гц.

Оператор *1* (рис. 19) присваивает идентификатору амплитуды помехи значение, равное 0,2. Оператор *2* выбирает на отрезке [0,1] первую из восьми функций Хаара. Операторы *3* и *4* производят интегрирование в соответствии со знаком функции Хаара. Оператор *5* вычисляет значение коэффициента функции Хаара.

```
"РАЗ"6."ДЛЯ"M=1"Ш"1"ДО"16"ВЫП""ДЛЯ"J=1"Ш"1"ДО"2↑(M-1)"ВЫП"
(K=2↑(M-1)+J;C[K]=(1/TW)×∫(I=(J-1)/2↑(M-1)×1⏨-3,(J-1/2)/2↑
(M-1)×1⏨-3,20,2↑((M-1)/2)×S(I))+(1/TW)×∫(I=(J-1/2)/2↑(M-1)
×1⏨-3,J/2↑(M-1)×1⏨-3,20,-(2↑((M-1)/2))×S(I));"ВЫВ""ЗНА"K,"
ПРОБ"1,C[K],"ПРОБ"3)"ГДЕ"A=1;МЮ=2;ТМЮ=80⏨-6;ОМС=2×π×1⏨5;TO
=1⏨-3;S(T)="Е"T<160⏨-6"ТО"(A×(T/ТМЮ)↑МЮ×EXP(МЮ-МЮ×(T/ТМЮ))
×COS(ОМС×T))"ИН"(0);C[1035]"КОН"
```

а

```
"РАЗ"5.L=1;K=1;M2.N="ЕС"Ʒ(Ɛ(NN)/2)=0"ТО"(Ɛ(NN))"ИН"(Ɛ(NN)+1
);"ЕС"L=1"ТО"(T=(K-1)/2↑NX;TM=(2×K-1)/(2↑NX+1);L=2)"ИН"(T=(
2×K-1)/2↑NX+1);TM=K/2↑NX;L=1);H=(TM-T)/N;N=N-1;И=F(T)+P[I];
I=I+1;M.T=T+H;И=И+4×(F(T)+P[I]);I=I+1;T=T+H;"ЕС"N=1"ТО"(И=(
И+(F(T)+P[I]))×H/3;I=I+1;"НА"M1)"ИН"(И=И+2×(F(T)+P[I]);I=I+1
);N=N-2;"НА"M;M1."ЕС"L=2"ТО"(И1=И;"НА"M2)"ИН"(И2=И);A=(И1-И
2)×√(2↑NX);"ВЫВ"K,"ПРОБ"2,A,"СТРОК";"ЕС"K=2↑NX"ТО"("СТОП")"
ИН"(K=K+1;"НА"M2)"ГДЕ"F(J)=SIN(2×π×8×J);NN=10;NX=3;P[200]"К
ОН"
```

б

```
"РАЗ"5.K=1;X=√(2↑H);"ДЛЯ"D=18"Ш"-8"ДО"2"ВЫП"("ВЫВ""СТРО"4,D
;"ДЛЯ"F=0"Ш"1"ДО"30"ВЫП"("ЕС"F=8"ТО"(F=9);"ВЫВ""СТРО"3,F;"Д
ЛЯ"A=.2"Ш".2"ДО"2"ВЫП"("ВЫВ""СТРО"2,A;"ДЛЯ"K=1"Ш"1"ДО"2↑H"В
ЫП"(И1=∫(T=(K-1)/2↑H,(2×K-1)/2↑(H+1),D,S);И2=∫(T=(2×K-1)/2↑
(H+1),K/2↑H,D,S);И=(И1-И2)×X;"ВЫВ"K,"ПРОБ"3,И,"СТРО")))"ГД
Е"H=3;S=SIN(2×π×8×T);A=SIN(2×π×F×T)"КОН"
```

в

Рис. 20. Программы моделирования адаптивного фильтра:

а — вычисления коэффициентов Фурье — Хаара функции *S* (*T*); *б* — при помехе типа «белый шум»; *в* — при детерминированной помехе: *X* — абсолютное значение функции Хаара; *KN* — индексы функции Хаара; *D* — дискретность численного интегрирования; *F* — частота помехи; *A* — амплитуда помехи; *И* — значение коэффициента функции Хаара; *S* — сигнал + помеха.

Операторы *6*, *7*, *8* и *9* образуют циклы для изменения амплитуды помехи и для выбора следующей функции Хаара.

Результаты проведенного моделирования показаны на рис. 21.

Таким образом, при действии помехи коэффициенты функций Хаара сохраняют свои положительные значения, которые приобрели колебательный характер с частотой, равной частоте помехи, но сдвинутой на четверть периода. Амплитуда помехи ослаблена в 10 раз. Учитывая, что коэффициенты сохраняют положительные значения при действии детерминированной помехи, можно сделать вывод о наличии полезного сигнала.

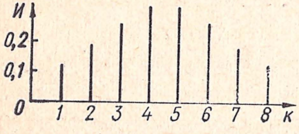


Рис. 21. Результаты моделирования фильтра по блок-схеме рис. 19 ($A = 1{,}6$).

Следовательно, для ортогонального разложения сигналов в задачах цифровой фильтрации целесообразно применять базисные функции Хаара, позволяющие уменьшать время обработки сигнала и являющиеся наиболее удобными для обработки на ЦВМ.

5. АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В БАЗИСЕ УОЛША

В винеровской теории анализа нелинейных систем выход неизвестной системы представляется в виде суммы полной системы ортогональных функционалов $G_n\,[K_n,\ x(t)]$, где $\{K_n\}$ — последовательность ядер, характеризующих нелинейную систему; $x(t)$ — вход системы.

Функционалы G_n являются ортогональными в том смысле, что если на вход системы поступает «белый

шум», то

$$\Xi\{G_n[K_n, x(t)]\,G_m[K_m, x(t)]\} = 0, \quad n \neq m,$$

где символ Ξ обозначает усреднение по совокупности.

Последовательность ядер K_n можно определить путем конструирования параллельных фильтров с импульсными характеристиками, образующими полную систему ортогональных функций $\{F_n(t)\}$. На входы анализируемой системы и фильтра поступает «белый шум» $x(t)$. Выход системы умножается на выходы параллельных фильтров и результирующий сигнал поступает в блок, интегрирующий по t (усреднение). Пусть n — число параллельных фильтров, тогда результат усреднения есть коэффициент $C_{p_1p_2\ldots p_n}$ разложения ядра n-го порядка в виде суммы n-кратных произведений функций $F_j(U_j)$:

$$K_n(U_1, U_2, \ldots, U_n) =$$

$$= \sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{p_n=0}^{\infty} C_{p_1p_2\ldots p_n}F_{p_1}(U_1)\ldots F_{p_n}(U_n).$$

Предлагаемый метод [26], основанный на использовании свойства функции Уолша, представляется наиболее эффективным с точки зрения практических применений винеровской теории нелинейных систем.

Для практических целей удобно использовать выражение функций Уолша через функции Радемахера. Известно, что функции Уолша $w_n(t)$ обладают следующими свойствами:

а) $w_{2^kn}(t) = w_n(2^k, t)$;

б) $w_{n_1}(t)\,w_{n_2}(t) = w_{n_1n\oplus_2}(t)$;

в) $w_n(t_1)\,w_n(t_2) = w_n(t_1 \oplus t_2)$;

г) $\int\limits_1^0 w_n(t)\,w_m(t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0; \\ 0 & \text{при } m \neq 0; \end{cases}$

д) $w(2n, t) = w(n, 2t-1)$

$\left.\begin{matrix} w(2n, t) = w(n, 2t-1) \\ w_1(2n+1, t) = -w(n, 2t-1) \end{matrix}\right\}$ при $\frac{1}{2} < t < 1$;

е) $\int\limits_0^1 w_n(t)\, w_m(t_1 \oplus t_2)\, dt_1 = a_n w_n,$

где a_n — коэффициенты Уолша — Фурье функции w_n.

Знаком $\oplus$ обозначено поразрядное сложение по mod 2 величин, которые представлены в двойной системе счисления и определяются так:

$$d \oplus e = \sum_{i=0}^{p=1} (d_i \oplus e_i)\, 2^i,$$

где $d = \sum\limits_{i=0}^{p=1} d_i 2^i$; $e = \sum\limits_{i=0}^{p=1} e_i 2^i$. Например, $0 \oplus 0 = 0$; $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$; $1 \oplus 1 = 0$.

Для отрицательных чисел d и e

$$(-d) \oplus (-e) = d \oplus e; \quad (-d) \oplus e = d \oplus (-e) = -(d \oplus e).$$

Из свойств функций Уолша, указанных в пп. б), в) и е), следует:

$$\int\limits_1^0 w_n(t_1)\, w(t_1 \oplus t_2)\, dt_1 = \int\limits_0^1 w_n(t_1 \oplus t_2)\, w(t_1)\, dt_1,$$

что является аналогом свойств интеграла свертки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(t_1)\, w(t_2 - t_1)\, dt_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w(t_2 - t_1)\, w(t_1)\, dt_1.$$

Эта аналогия, как и соответствующая аналогия с теоремой Хинчина — Винера, является основой предлагаемого подхода к анализу нелинейных систем.

В винеровской теории параллельными фильтрами являются фильтры Уолша, осуществляющие преобразование входа $f(t)$ в выходную функцию

$$y(t) = \int_0^1 w_n(u)\, w(t \oplus u)\, du,$$

или в другой фазе записи

$$y(t) = a_n w_n(t). \qquad (3.62)$$

В случае, когда на входе фильтра Уолша — «белый шум» с нулевым средним и дисперсией A, коэффициенты a_n выхода фильтра имеют гауссовские распределения с параметрами, определяемыми формулами

$$\Xi\{a_n\} = 0; \quad \Xi\{a_n a_m\} = A\delta_{nm}, \qquad (3.63)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Так как $\Xi\{x(t_1)\,x(t_2)\,\ldots\,x(t_n)\} = 0$ при нечетных n и $\Xi\{x(t_1)\,x(t_2)\,\ldots\,x(t_n)\} = \sum\limits_i \prod\limits_j \Xi\{x(t_i)\,x(t_j)\}\,\delta_{ij}$ при четных n, где суммирование осуществляется по всем произведениям двух сомножителей, из этого следует, что $\Xi\{a_{p_1} a_{p_2}\,\ldots\,a_{p_n}\} = 0$, если n — нечетное, и

$$\Xi\{a_{p_1} a_{p_2}\,\ldots\,a_{p_n}\} = \sum_i \prod_j \Xi\{a_{p_i} a_{p_j}\}\,\delta_{ij}, \qquad (3.64)$$

если n—четное.

Пусть сигнал на выходе нелинейной системы связан с входным сигналом $x(t)$ уравнением

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n[H_n, x(t)], \qquad (3.65)$$

где $\{G_n\}$ — система ортогональных функционалов с соответствующей заменой интегралов свертки оператором $\oplus$.

При $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ имеют место следующие соотношения:

$$G_0[H_0 x(t)] = H_0; \quad G_1[H_1, x(t)] = \int_0^1 H_1(u);$$

$$G_2[H_2, x(t)] =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 H_2(u, v)\, x(t \oplus u)\, x(t \oplus v)\, du dv - A \int_0^1 H_2(u, u)\, du;$$

$$G_3[H_3, x(t)] =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 H_3(u, v, w)\, x(t \oplus u)\, x(t \oplus v)\, x(t \oplus w)\, du dv dw -$$

$$- 3A \int_0^1 \int_0^1 H_3(u, v, w)\, x(t \oplus u)\, du dv. \quad (3.66)$$

Ядра $\{H_n\}$ определяются путем разложения в ряд Уолша — Фурье следующим образом:

$$H_1(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w_k(u); \quad (3.67)$$

$$H_2(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij} w_i(u)\, w_j(v). \quad (3.68)$$

При подаче на вход системы «белого шума» $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w_k(t)$ выходной сигнал может быть выражен [с учетом подстановки уравнений (3.66), (3.67) и (3.68), (3.65)] в следующей форме:

$$y(t) = H_0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_k w_k(t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i a_j d_{ij} w_i(t)\, w_j(t) - A \sum_{j=0}^{\infty} d_{ii} + \cdots \quad (3.69)$$

Используя основное мультипликативное свойство функции Уолша, указанное в п. б, выходной сигнал неизвестной системы можно представить в виде

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w_k(t). \tag{3.70}$$

Коэффициенты b_k вычисляются путем сравнения коэффициентов при $\omega_k(t)$, $k \neq 0$, в формулах (3.69) и (3.70)

$$b_k = a_k c_k + \sum\sum{}^{*} a_i a_j d_{ij} + \cdots, \tag{3.71}$$

где * — двойная сумма по тем индексам, для которых $i \oplus j = k$.

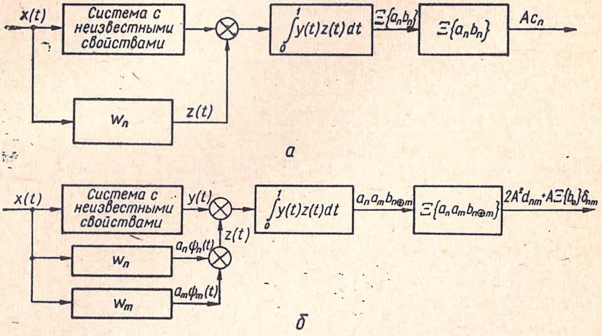


Рис. 22. Алгоритмы оценки ядра первого (*а*) и второго (*б*) порядков.

Поскольку по предположению $k \neq 0$, из свойств оператора следует, что $i \neq j$. При $k = 0$

$$b_0 = H_0 + a_0 c_0 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 d_{ij} - A \sum_{i=0}^{\infty} d_{ij} + \cdots \tag{3.72}$$

Из последней формулы следует, что $\Xi\{b_0\} = H_0$, так как второй член в правой части выражения (3.72) равен нулю (в соответствии с формулой (3.63) $\Xi\{a_0\} =$

$= 0$ и $\Xi\ \{a_i^2\} = A$; остальные члены по той же причине также равны нулю).

Как видно из рис. 22, *а*, коэффициенты Уолша — Фурье для $H_1\ (u)$ определяются из уравнения

$$c_n = \Xi\ \{a_n b_n\} / A.$$

Для доказательства этого рассмотрим выход $z\,(t)$ фильтра Уолша. Из формулы (3.62) следует, что $z\,(t) = a_n w_n\ (t)$, и, следовательно,

$$\int_0^1 y\,(t)\, z\,(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} b_k a_n \int_0^1 w_k\,(t)\, w_n\,(t)\, dt.$$

Поскольку $\{w_n\ (t)\}$ — ортогональная система функций в интервале [0, 1], то $\int_0^1 y\ (t) z\ (t)\ dt = a_n b_n$. Из формулы (3.71) при $k = 0$ следует

$$\Xi\ \{a_n b_n\} = \Xi\ \{a_n a_n\}\ c_n + \sum_i \sum_j{}^{*}\ \Xi\ \{a_i a_j a_n\}\ d_{ij} + \cdots,$$

откуда, с учетом формулы (3.64), вытекает, что $\Xi \{a_n b_n\} = A c_n$, что и требовалось доказать.

Рис. 22, *б* иллюстрирует методику определения ядра второго порядка $H_2\ (u,\ v)$. Коэффициенты разложения $H_2\ (u,\ v)$ находятся по формуле

$$d_{nm} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Xi\ \{a_n a_m b_{n \oplus m}\}}{A^2} - \frac{\Xi\ \{b_0\}}{A}\ \delta_{nm}\right]. \qquad (3.73)$$

Доказательство этого результата основывается на использовании свойства мультипликативности и ортогональности функции Уолша.

Пример 5. Рассмотрим систему второго порядка общего вида, изображенного на рис. 23, где крайние блоки соответствуют фильтрам Уолша.

Выход системы может быть представлен в следующей форме:

$$y(t) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 w(t_2)\, w(t_2 \oplus u)\, w(t_2 \oplus \nu)\, x(t_1 \oplus u) \times$$

$$\times\, x(t_1 \oplus \nu)\, dt_2 du d\nu \qquad (3.74)$$

Из этой формулы можно выделить ядро второго порядка, положив

$$H_2(u, \nu) = \int_0^1 w(t_2)\, w(t_2 \oplus u)\, w(t_2 \oplus \nu)\, dt_2.$$

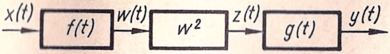


Рис. 23. Структурная схема анализа системы второго порядка.

Поскольку $H_0 = \Xi\{b_0\}$ и $\Xi\{b_0\} = \Xi\{y(t)\}$, можно записать выражение для ядра нулевого порядка $H_0 = A\int_0^1 H_2(u, u)\, du$.

Следовательно, $y(t)$ представляется в виде суммы ортогональных функционалов:

$$y(t) = H_0 + \int_0^1 \int_0^1 H_2(u, \nu)\, x(t_1 \oplus u)\, x(t_1 \oplus \nu)\, du d\nu -$$

$$- A\int_0^1 H_2(u, u)\, du.$$

Представляют интерес два следующих случая: 1) $w(t_1) = \delta(t)$ и 2) $w(t_2) = \delta(t)$, для которых проведены расчеты ядра второго порядка.

В первом случае ядро имеет вид $H_2(u, \nu) = w(u)\, \delta(u - \nu)$, где $\delta(u - \nu)$ — дельта-функция Дирака.

Таким образом, ядро равно нулю всюду вне прямой $u = \nu$, на которой оно совпадает с функцией $w(u)$.

5 7—1403

6. ФИЛЬТР КАЛМАНА В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

ФИЛЬТР КАЛМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ

Пусть задано некоторое линейное стохастическое дифференциальное уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial x} = L_x U(x,t) + B(x,t) W(x,t), && x \in D; \\ &\beta_x U(x,\ t) = 0, && x \in \pi D; \\ &Z_x(x,t) = M(x,t) U(x,t) + V(x,t), && x \in D, \end{aligned}\right\} \quad (3.75)$$

определенное при $t \geqslant t_0$ в n-мерной области D с поверхностью πD. В этом уравнении $\beta\ (x,\ t)$ — некоторая неизвестная матрица входных сигналов; $Z_x\ (\cdot)$ и $\beta_x\ (\cdot)$ — заданные линейные операторы в D и πD. Эти операторы могут быть дифференциальными, интегральными и интегро-дифференциальными; $M\ (x, t)$ — известный оператор наблюдений, воздействующий на пространственные переменные; $W\ (x,\ t)$, $V\ (x,\ t)$ — регулярные гауссовские случайные процессы, распределенные в пространстве и удовлетворяющие следующей системе равенств:

$$\left.\begin{aligned} &E\,[W(x,\ t)] = 0; \quad E = [V(x,\ t)] = 0; \\ &E\,[W(x,\ t)\, W^T(x_1,\ \tau)] = Q(x,\ x_1,\ t)\,\delta(t - \tau); \\ &E\,[V(x,\ t)\, V^T(x_1,\ \tau)] = R(x,\ x_1,\ t)\,\delta(t - \tau); \\ &E\,[V(x,\ t)\, W^T(x_1,\ t)] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.76)$$

при всех $t,\ \tau \geqslant t_0$ и $x_1,\ x_1 \in D$. Здесь $E\,[\cdot\,]$ обозначает операцию усреднения; $Q\ (x,\ x_1,\ t)$ — симметрическая положительно полуопределенная матрица, а $R\ (x,\ x_1,\ t)$ — симметрическая положительно определенная матрица.

Для систем (3.75) и (3.76) задача оптимальной фильтрации формулируется следующим образом [31]: при заданных уравнениях и наблюдаемости системы, имеющейся реализации $Z(x, t)$ (при $x \in D$) наблюдений в интервале $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ найти оптимальную оценку $\hat{U}(x, t)$; $x \in D$ для $U(x, t)$ и при $t \geqslant t_0$.

Уравнения фильтра Калмана, которые решают так сформулированную задачу, имеют вид

$$\frac{\partial \hat{U}(x, t/t)}{dt} = L_x U(xt/t) + \int_D \int_D P(x, x_1, t/t) M^T(x, t) \times$$
$$\times R^2(x_1, x_2, t) Z(x_2, t/t)\, dD_1 dD_2; \qquad (3.77)$$

$$\frac{\partial P(x, x_1, t/t)}{dt} = L_x P(x, x_1, t/t) + P(x, x_1, t/t) L_x^T +$$
$$+ B(x, t) B^T(x, t) - \int_D \int_D P(x, x_1', t/t) M^T(x', t) \times$$
$$\times Q^T(x', x'', t) M(x'', t) P(x'', x_1, t/t)\, dD' dD''; \qquad (3.78)$$

$$\beta_x \hat{U}(x, t/t) = 0; \quad x \in \pi D; \quad U(x, t_0/t_0) = E[V_0(x)], \quad x \in D;$$

$$z(x, t/t) = z(x, t) - M(x, t)\hat{U}(x, t/t); \quad P(x, x_1, t/t) =$$
$$= P_0(x, x_1),$$

где t/t — означает, что на основе наблюдений до момента $/t$ принимаем решение о значениях x в момент $t/$.

Уравнения (3.77) и (3.78), описывающие ФК, являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Их решение на универсальной аналоговой технике требует применения ряда специальных приемов. Если же решать эту задачу на специальных типа сеточных АВМ, то приходится разрабатывать совершенно новые подходы к ее решению. Кроме того,

при решении этой задачи нужно выполнять большой объем трудоемких вычислений. Весь этот комплекс трудностей и послужил толчком для рассмотрения других способов решения поставленной Калманом задачи фильтрации. Поэтому рассматривается дискретный вариант Калмана, описываемый системой разностных уравнений, которые легко представить в виде алгоритма для решения на ЦВМ. Учитывая недостатки аналогового и цифрового моделирования фильтров Калмана, ниже предложен алгоритм решения уравнений фильтра на гибридных вычислительных системах и, в частности, на аналого-цифровых вычислительных комплексах.

ФИЛЬТР КАЛМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим случай, когда измерения производятся в дискретные моменты времени, т. е. $t = \Delta tk$ и в дискретных точках пространства, т. е. $x = l\Delta x$; $l = 1, 2, \ldots, L$; $k = 1, 2, \ldots, K$ Для этого случая уравнения (3.75), (3.77) и (3.78) принимают вид

$$U[l, k+1] = L_э U[l, k] + B[l, k]\,w[L, k]; \quad (3.79)$$

$$\beta_l U[L, k] = 0; \quad l = 1, L;$$

$$Z[L, k] = M[L, k]\,U[L, k] + V[L, k],$$

где

$$\bar{L}_l = I + \Delta t L_l; \quad \bar{B}[l, k] = \Delta t B[L, k]; \quad (3.80)$$

$$P[l, n, k+1] = \bar{L}_l P[l, n, k] + P[l, n, k]\,\bar{L}_n^T + B[L, k]\,Q[L, n, k]\,B^T[n, k] - \sum_{r=1}^{L}\sum_{m=1}^{N} P[l, r, k]\,M^T[r, k]\,Q[r, m, k]\,M[m, k] \times P[m, n, k], \quad (3.81)$$

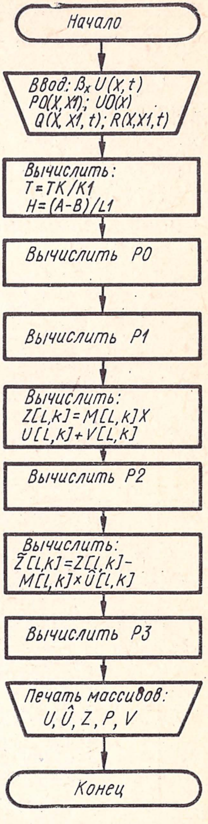


Рис. 24. Общая структурная схема фильтра в пространстве дискретного времени:
P0 — процедура генерации псевдослучайных гауссовских процессов $W(x, t)$ и $V(x, t)$; *P1* — процедура решения уравнения (3.79); *P2* — процедура решения ковариации ошибки (3.81); *P3* — процедура решения уравнения (3.80)

где $Q[\ \ ] = Q[\ \ ]/\Delta t$; $P[\ \ ] = P[\ \ ]/\Delta t$;

$$n = 1, 2, \ldots, N; \quad B_l \hat{U}[L, k] = 0;$$

$$l = 1, L; \quad \hat{U}[l, 1] = E\{U_0[l]\};$$

$$l = 1, 2, \ldots, L; \quad z[m, k] = z[m$$

$$k] - M[m, k]\hat{U}[m, k];$$

$$P[L, n, 1] = P_0[l, n].$$

Задачу фильтрации в такой постановке целесообразно решать на ЦВМ. Общий алгоритм решения такой задачи показан на рис. 24.

Фильтр Калмана, синтезированный по предложенному алгоритму для систем с распределенными параметрами, может найти свое применение в тех областях, где информация о протекающем процессе распределена в пространстве (метеорология, радиоастрономия), а время является непрерывным или дискретным.

При последовательном решении уравнений ФК (чисто цифровая реализация) ограничено количество возможных узлов пространственной сетки (конечная память ЦВМ) и необходимо длительное время решения.

ФИЛЬТР КАЛМАНА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

Сформулированные уравнения ФК (3.77) и (3.78) могут быть успешно решены также на аналого-цифровом комплексе. Рассмотрим принцип решения этих уравнений методом Либмана.

При моделировании сигнала $U\ (x,\ t)$, оценки $\hat{U}\ (x,\ t)$ и ковариационной функции $P\ (x,\ x_1,\ t)$ на аналого-цифровом комплексе необходимо использовать два генератора гауссовских шумов $W\ (x,\ t)$ и $V\ (x,\ t)$.

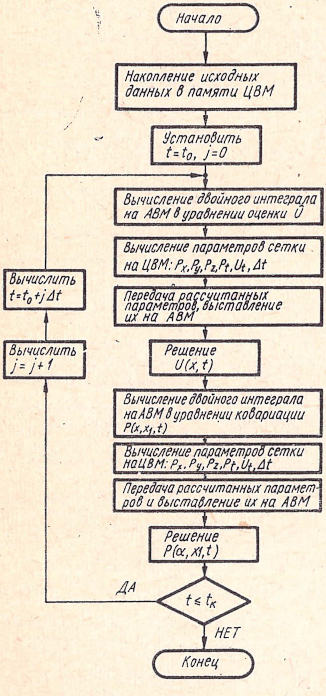
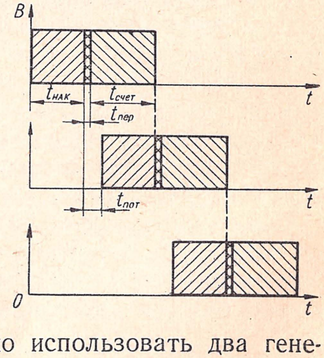


Рис. 25. Блок-схема алгоритма решения задачи на гибридной системе.

Рис. 26. Временные диаграммы работы гибридного фильтра:

B — быстродействие ЦВМ; $t_{нак}$ — время накопления в буферной памяти результатов измерений с принятой дискретизацией времени и пространства; $t_{пер}$ — время обмена информацией между буферной памятью и ЦВМ; $t_{счет}$ — время счета задачи фильтрации; $t_{пот}$ — время, когда теряется информация из-за параллельности работы комплекса АЦВК во времени.



Двойные интегралы в правых частях уравнений ФК (3.77), (3.78) предполагается вычислять на АВМ. Выражения $P(x, x', t/t)$, $P(x'', x, t/t)$ и $Z(x, t/t)$ не делают данные уравнения нелинейными, так как при методе Либмана время является дискретным, а, кроме того, на данном этапе все вычисления ведутся при $j = \Delta t = \text{const}$. Исходными данными при вычислении интегралов являются начальные значения функций $P(x, x_1, t_0/t_0)$ и $\hat{U}(x, t_0/t_0)$.

Для решения задачи фильтрации на гибридной системе предполагается следующая блок-схема алгоритма решения, показанная на рис. 25.

Временные диаграммы работы такого гибридного фильтра Калмана можно представить в виде диаграммы (рис. 26).

Определяющим фактором практической пригодности фильтра при его работе в реальном масштабе времени является время потери $t_{пот}$. Допустимая величина $t_{пот}$, а тем самым величина погрешности фильтра, является разной при решении определенных задач.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

В качестве примера моделирования фильтра по проведенным алгоритмам рассмотрим решение задачи фильтрации распределенных помех [10].

Процесс описывается стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = 1{,}5 \frac{\partial U^2(x, t)}{\partial x^2} + W(x, t); \quad 0 \leqslant x \leqslant R,$$

для которого граничные условия $U(0, t) = 0$; $U(R, 1) = 0$, а начальные $U(x, 0) = 0{,}1 \sin(\pi x)$. Наблюдаемый процесс аддитивно связан с помехой

$V(x, t)$:

$$Z(x, t) = U(x, t) + V(x, t).$$

Дополнительно заданы характеристики случайных распределенных процессов $W(x, t)$ и $V(x, t)$ в виде ковариационных матриц

$$Q(x, x_1, t) = 0,5 \exp|-(x - x_1)^2|; \; Q(x, x_1, t) = \delta(x, x_1);$$
$$R(x, x_1 t) = \delta(x - x_1).$$

В этом примере $L_x = 1{,}5 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$; $B(x, t) = 1$; $M(x, t) = 1$.

Уравнения ФК принимают вид

$$\frac{\partial U(x, t)}{dt} = \frac{\partial^2 \hat{U}(x, t)}{\partial x^2} + \int\limits_D P(x, x_1, t/t)\, \hat{Z}(x_1, t/t)\, dD;$$

$$\frac{\partial P(x, x_1, t/t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 P(x, x_1, t/t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, x_1, t/t)}{\partial x_1^2} +$$
$$+ Q(x, x_1, t) - \int\limits_D \int\limits_D P(x, x_1, t/t)\, Q(x', x'', t) \times$$
$$\times P(x'', x_1, t/t)\, dD' dD''.$$

При моделировании ФК приняты граничные условия

$$\hat{U}(0, t) = 0; \quad \hat{U}(k, z) = 0; \quad P(0, V_1, t) = 0;$$
$$P(x, 0, t) = 0$$

и начальные условия

$$\hat{U}(x, 0) = 0{,}1 \sin(\pi x), \; P(x, x_1, 0) = 0{,}1 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x).$$

Отметим ряд особенностей моделирования этой задачи.

1. Моделирование случайных распределенных процессов $W(x, t)$ и $V(x, t)$.

Так как такие процессы в каждой точке пространства и во времени (x, t) характеризуются своей плот-

ностью распределения, то в данном случае сделано упрощение, заключающееся в следующем. Принято, что плотность распределения в каждой точке (x, t) является постоянной. Такое упрощение делает моделирующий алгоритм более быстродействующим. Для обоих процессов $W(x, t)$ и $V(x, t)$ принят нормальный закон распределения с нулевым математическим ожиданием и различными дисперсиями.

2. Присутствие в задаче трехмерных массивов.

Эта задача решена методом, близким к методу Либмана, который применяется при решении дифференциальных уравнений в частных производных на гибридных комплексах (АЦВМ). Содержание метода заключается в фиксировании времени $t = t_ф$ и нахождении значения $P(x, x_1, t_ф)$, т. е. массива $P[l, k]$. Выводом из памяти ЦВМ $t_ф$ и соответствующего массива P делается следующий шаг во времени и находится соответствующий массив P.

3. Для решения уравнений в частных производных применен метод прогонки, обладающий преимуществами по сравнению с другими численными методами решения таких уравнений.

4. При любом численном методе решения дифференциальных уравнений в частных производных необходимо рассмотреть два вопроса: пригодность разностных схем и условия устойчивости.

Если дифференциальное уравнение аппроксимируется двумя различными разностными уравнениями, то даже при одном и том же шаге сетки можно получить значительное расхождение. Кроме того, не всегда возможно улучшить аппроксимацию путем уменьшения шага сетки, даже если разностное уравнение допускает точное решение. Пригодны только такие схемы, в которых при уменьшении шага сетки решение разностного уравнения сходится к решению рассматриваемого дифференциального уравнения. Для пара-

болических и гиперболических уравнений в частных производных такая сходимость имеет место только тогда, когда шаги сетки по обеим координатам удовлетворяют некоторому условию устойчивости. Так, решение разностного уравнения

$$\frac{U(x+\Delta x,\ t)-2U(x,\ t)+U(x-\Delta x,\ t)}{\Delta x^2}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\,\frac{U(x,\ t-\Delta t)-U(x,\ t)}{\Delta t}$$

сходится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 U(x,\ t)}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial U(x,\ t)}{\partial t}$$

при $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$, если $\Delta x\leqslant\frac{1}{2a}\Delta x^2$. Решение разностного уравнения

$$\frac{U(x+\Delta x,\ t)-2U(x,\ t)+U(x-\Delta x,\ t)}{\Delta x^2}=$$

$$=\frac{1}{c^2}\,\frac{U(x,\ t-\Delta t)-2U(x,\ t)\,U(x,\ t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

сходится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U(x,\ t)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 U(x,\ t)}{\partial t^2}$$

при $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$, если $\Delta t\leqslant\frac{1}{c}\Delta x$.

Такие условия устойчивости обеспечивают также лучшую аппроксимацию при конечном шаге сетки.

В данном случае при $0\leqslant x\leqslant 0{,}5$ и $\Delta x=0{,}125$

$$\Delta t=\frac{1}{2a^2}\Delta x^2=\frac{1}{2\cdot 1{,}5}\,0{,}125^2=0{,}0052.$$

При моделировании ФК было принято $\Delta t=0{,}004$ с, в результате чего получены следующие данные: кова-

риации ошибки $P(x, x_1, t)$; сигналы системы — идеальный $U(x, t)$, с помехой $Z(x, t)$, отфильтрованный $\hat{U}(x, t)$.

О качестве работы ФК судим на основе следующих факторов.

1. Матрица ковариации ошибки $P(x, x_1, t)$ во всех точках пространства (x, x_1) должна иметь затухающий характер во времени. Установившиеся значения

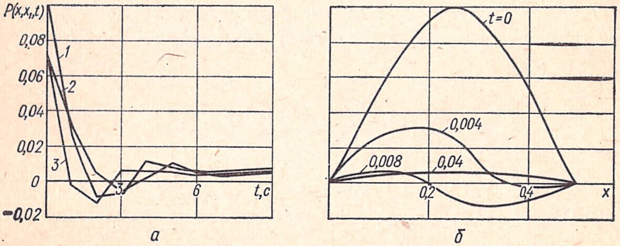


Рис. 27. Зависимость матрицы ковариации ошибок:

а — при фиксированных x; *1* — $x_1 = 0,25$; *2* — $x = 0,25$; $x_1 = 0,125$; *3* — $x = 0,25$; $x_1 = 0,375$; *б* — при фиксированном времени

$P(x, x_1, t)$ свидетельствуют о постоянной ошибке фильтрации, минимальной при данных условиях фильтрации. Следовательно, при разработке таких фильтров необходимо стремиться получить возможно минимальное значение ошибки. Нулевое значение ошибки невозможно получить даже теоретически, так как в правой части уравнения ковариации ошибки есть свободный член $[B(x, t)\, Q(x, x_1, t)\, B^T(x, t)]$. На рис. 27, *а* показаны характеристики $P(x, x_1, t)$ для разных точек пространства (x, x_1) и на рис. 27, *б* — при фиксированном времени.

2. Для наглядного восприятия результатов фильтрации приведены совместные характеристики сигна-

лов $U(x, t)$, $\hat{U}(x, t)$ и $Z(x, t)$ при фиксированной точке пространства (рис. 28).

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) фильтр не дает искажения формы сигнала $\hat{U}(x, t)$;

2) достигнута высокая с практической точки зрения степень близости сигнала $U(x, t)$ к $V(x, t)$. Эту близость в установившемся режиме оцениваем на основе значения $P(x, x_1, t)$. Меру близости можно представить как

$$\delta = 1 - \frac{|\hat{U}(x, t) - U(x, t)|}{U(x, t)}.$$

В точках $x = 0{,}375$ наблюдается самое большое расхождение в момент $t = 0{,}008$ с. Для этого момента

$$\delta = 1 - \frac{0{,}038489 - 0{,}0354464}{0{,}0354464} \approx 0{,}923$$

Для оценки качества фильтрации на всем отрезке рассматриваемого времени при фиксированной точке пространства можно применять обобщенную меру близости в виде

$$\delta = 1 - \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} \hat{U}(x_j, t_i) - \sum_{i=1}^{k} U(x_j t_i)\right] \Big/ \sum_{i=1}^{k} U(x_j, t_i),$$

где $i = 1, 2, \ldots, k$; $\Delta t = \Delta ti$; $j = 1, 2, \ldots, L$; $x = \Delta xj$.

Для $x = 0{,}375$ получено $\delta = 0{,}982$.

Рассмотрим оценку превышения уровня сигнала $W(x, t)$ над уровнем помехи $V(x, t)$. Так как сигналы $W(x, t)$ и $V(x, t)$ являются случайными процессами, то в каждой точке (x) соотношение уровня сигнала и помехи во времени будет различное. Для его оценки в данный момент времени (t) и в данной точке пространства (x) можно определить показатель ρ = Уро-

вень сигнала/Уровень помехи. Для оценки ρ в данной точке пространства (x) на продолжении интервала наблюдения процесса используем обобщенную оценку

$$\rho = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |c_i| / \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |h_i|,$$

где k — количество точек отсчета; c_i и h_i — уровень соответственно сигнала и помехи при $x = \text{const}$.

Для примера приведем оценки сигналов, используемых при моделировании.

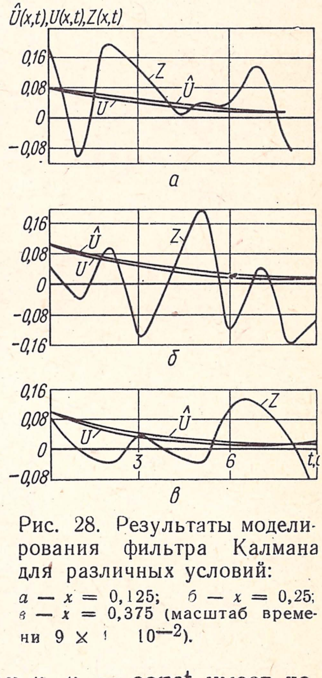


Рис. 28. Результаты моделирования фильтра Калмана для различных условий:

а — $x = 0,125$; *б* — $x = 0,25$; *в* — $x = 0,375$ (масштаб времени 9×10^{-2}).

Превышение сигнала $W(x, t)$ над $V(x, t)$ может быть довольно большим. Кроме того, при моделировании решения для $x = 0,25$ показатель $\rho = 3,7$. Так, например, большое значение имеют граничные условия. При рассмотрении вопроса о качестве работы ФК не была проанализирована динамика этого процесса. На основе обработки (рис. 27, *а* и *б*) и приведенных исследований можно заключить следующее: начальное значение $P_0(x, x_1)$ не меняет своей формы, а меняет лишь свой уровень только тогда, когда сам процесс $P(x, x_1, t)$ при $x, x_1 = \text{const}$ имеет характер, показанный на рис. 28.

Блок-схема комплекса алгоритмов моделирования ФК показана на рис. 29.

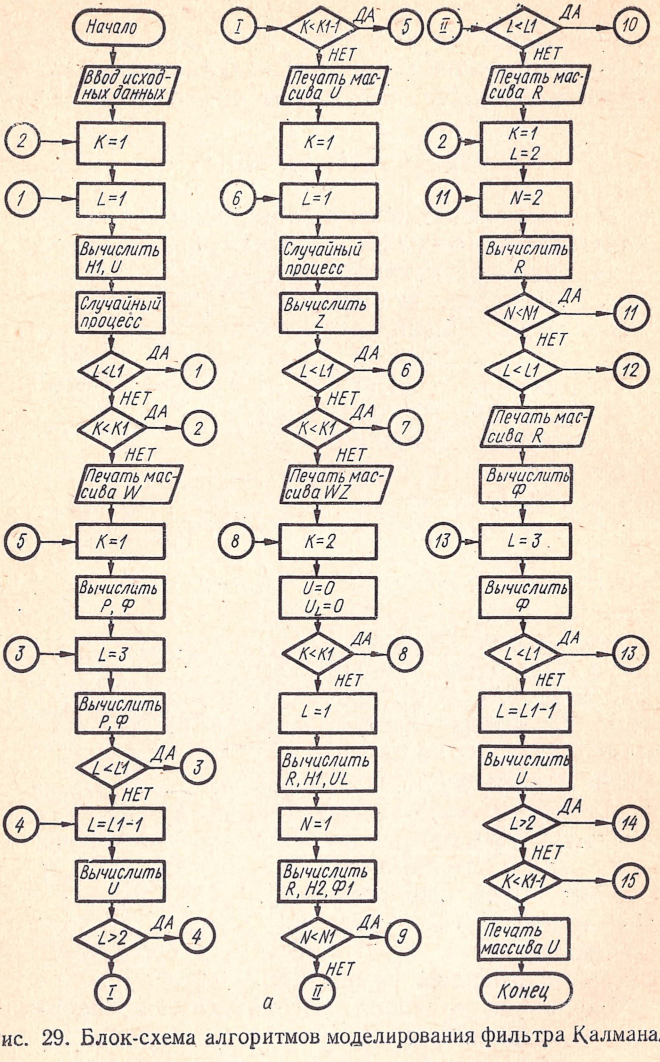


Рис. 29. Блок-схема алгоритмов моделирования фильтра Калмана.

Глава 4

РАСПОЗНАВАНИЕ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ АДАМАРА

1. ОПТИМАЛЬНЫЕ РАВНОУДАЛЕННЫЕ СИГНАЛЫ

В теории идеального приема доказывается, что в условиях действия гауссовской помехи условная вероятность регистрации сообщения j вместо i определяется расстоянием между сигналами этих сообщений

$$\rho^{ij} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} [s_i(t) - s_j(t)]^2 \, dt}.$$

Это соответствует метрическим соотношениям для пространства Гильберта. Если $s_j(t) = 0$, то

$$\rho_{i0} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s_i^2(t)\, dt} = \sqrt{E_i/T}, \tag{4.1}$$

где ρ_{i0} — длина вектора или расстояние между точкой пространства, представляющей функцию $s_i(t)$, и началом координат; E_i — энергия i-го сигнала.

Если $s_i(t)$ и $s_j(t)$ ортогональны, то

$$\rho_{ij} = \sqrt{\rho_{i0}^2 + \rho_{j0}^2}. \tag{4.2}$$

Так как вероятность трансформации $i \to j$ опреде-

ляется значением ρ_{ij}, то при требовании одинаковой достоверности всех m сообщений целесообразно построить такую систему сигналов, для которой выполняется условие

$$\rho_{ij} = \rho = \text{const}, \quad ij = \overline{1,\ m}, \tag{4.3}$$

т. е. расстояние между всеми сигналами одинаково. Такие сигналы называются равноудаленными, или эквидистантными.

Если энергия всех ортогональных сигналов одинакова, т. е. $E_1 = E_2 = \ldots = E_m = E$, то из формул (4.1), (4.2) и (4.3) имеем $\rho_{ij} = \sqrt{2E/T}$.

В. А. Котельников впервые сформулировал и решил важную для теории связи задачу [9]:

найти систему равноудаленных сигналов, обладающих одинаковой энергией и обеспечивающих минимальную вероятность неправильного опознания их или заданную вероятность неправильного опознания при минимальной энергии.

Такая система сигналов называется оптимальной. Доказано, что скалярное произведение оптимальных равноудаленных сигналов

$$v_{ij} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} s_i(t)\, s_j(t)\, dt =$$

$$= \begin{cases} E_{\text{опт}}/T & \text{при } i = j; \\ -E_{\text{опт}}/[T(m-1)] & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

где $E_{\text{опт}}$ — энергия оптимальных равноудаленных сигналов.

Таким образом, проверкой на оптимальность может служить величина отношения

$$v_{ij}/v_i = -(m-1)^{-1}. \qquad (4.4)$$

Симплексный код является системой оптимальных сигналов. Для них строго выполняется отношение (4.4).

Двоичные сигналы, равноудаленные по Хеммингу, являются также равноудаленными по Котельникову. При проверке на оптимальность по формуле (4.4) следует пользоваться правилом умножения разрядов двоичных чисел: $0 \cdot 0 = 1 \cdot 1 = +1$; $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = -1$.

Таким образом, идеальными условиями работы классификатора в распознающем автомате будут такие, при которых каждому классу объектов соответствует сигнал с выхода блока сложных (или простых) признаков, записанный в соответствующей строке симплексного кода. В этом случае на классификатор будут поступать всегда сигналы, соответствующие системе оптимальных сигналов, а это гарантирует минимальное число ошибок при их распознавании. Впервые было предложено использовать симплексные коды в качестве универсальной системы эталонов при распознавании сигналов в работах [17, 18, 19].

Симплексный код ($H_э$) просто может быть получен из нормализованной матрицы Адамара путем вычеркивания первого столбца, состоящего из $+1$.

Пример 6. Пусть имеем

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{тогда}\quad H_э = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $m = 4$, $v_{ij} = -1/3$, $v_{ii} = 1$ и проверка по формуле (4.4) дает $v_{ij}/v_{ii} = -1/3 = -1/4-1$.

2. АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ СИГНАЛОВ

Рассмотрим схему распознающего автомата (РА), изображенную на рис. 30. Пусть имеется m сигналов, подлежащих классификации Выше было показано,

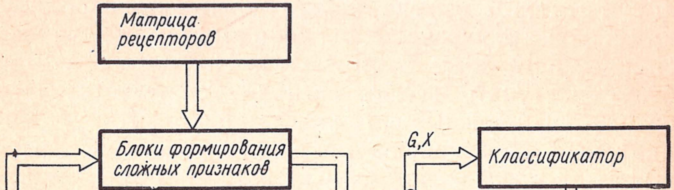


Рис. 30. Структурная схема распознающего автомата.

что идеальными условиями работы классификатора в РА будут такие, при которых каждому классу объектов соответствует сигнал с выхода блока сложных (или простых) признаков, записанный в соответствующей строке матрицы $H_э$ — матрицы универсальных эталонов. Покажем, как, пользуясь $H_э$, строить процесс минимизации описания или отбора признаков.

Результат накопления информации о распознаваемых сигналах можно представить с помощью матрицы $G_\Sigma = \{g_{ij}\}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, L}$ (L — размерность сигнального вектора X_L), где $g_{ij} = (2n_{ij}^{+} - \xi)/\xi$; $-1 \leqslant g_{ij} \leqslant 1$, n_{ij}^{+} — число $+1$ образовавшихся на j-м выходе блока формирования признаков при предъявлении в процессе обучения ξ объектов i-го класса.

Образуем матрицу отбора информативных координат $\Phi = H_э^T G_\Sigma$ $(n \times L,\ L \gg n)$; $\Phi = \{\varphi_{ij}\}$. Критерий для отбора $\sup\limits_j |\varphi_{ij}|$; $j = \overline{1, L}$.

Отметим в матрице Φ соответствующие элементы знаков ◐:

$\Phi =$

	1	2	3	...	k	...	l	...	L
1					◐				
2									
3							◐		
⋮									
n									

Расположим отобранные элементы в порядке возрастания индекса строки: φ_{1k}, φ_{2i}, φ_{3p}, ..., φ_{nt}.

Пользуясь указанием вторых индексов, образуем матрицу весов

$$G = \begin{bmatrix} g_{1k} & g_{1l} & g_{1p} & \dots & g_{1t} \\ g_{2k} & g_{2l} & g_{2p} & \dots & g_{2t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{mk} & g_{ml} & g_{mp} & \dots & g_{mt} \end{bmatrix}.$$

Вторые индексы k, l, p, ..., t указывают на номера информативных разрядов вектора X_L (номера столбцов G_Σ).

Действительно, например, k-я координата вектора X_L при предъявлении объектов 1 класса чаще будет выдавать символ, совпадающий с h_{1k}, при предъявлении объектов 2 класса — символ, совпадающий с h_{2k}, и т. д., а весь вектор $X = \{x_k, x_l, x_p, \dots, x_t\}$ при предъявлении объектов 1 класса будет больше похож на вектор, записанный в первой строке $H_э$, при предъявлении объектов 2 класса — похожий на вектор, записанный во второй строке, и т. д. Решающая процедура здесь получается очень простой. Отыскав вектор $R = GX^T - \frac{1}{2} G^0 = [R_1, R_2, \dots$ $\dots, R_m]^T$, где G^0 — столбец, образованный из диагональных элементов матрицы $G^* = GG^T$, по $\sup\limits_i R_i$ определяют класс i.

Надежность распознавания по каждому из m классов P_i $(i = \overline{1, m})$ также можно приближенно оценить по сравнительно простой формуле

$$P_i \cong \sum_{\nu=0}^{\tau} C_n^{n-\nu} p_i^{n-\nu} (1 - p_i)^\nu,$$

где $p_i = \frac{1}{2n} \sum\limits_{j=1}^{n} (g_{ij} h_{ij} + 1)$ — средняя вероятность появления необходимого кодового слова (вектора X) при предъявлении объектов n-го класса; $\tau = [(d -$

— 1)/2] — число допустимых ошибок в коде; d — хэммингово расстояние; $[\cdot]$ — наибольшее целое.

В ряде случаев оказывается удобней работать с отображением сигнала (или его преобразования линейного или нелинейного) на фазовой плоскости $\{\ddot{s},\ s\}$. Для поиска подходящих преобразований сигнала и отображения, избавляющих от влияния неинформативных, мешающих параметров, требуется индивидуальный подход [12]. Ранее была показана полезность преобразования Адамара и его логической модификации для получения инвариантности к возмущениям типа сдвига, изменения масштаба и др

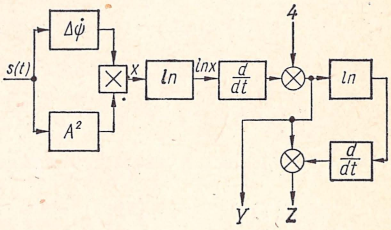


Рис. 31. Схема преобразований сигнала $s(t)$ для формирования фазового изображения.

Рассмотрим еще одну возможность. Пусть имеется сигнал (рис. 31), аналитическая запись которого

$$s(t) = U_1 a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_1) +$$
$$+ U_2 a(t - \tau) \cos[\omega_0 (t - \tau) + \varphi_2],$$

где $a(t) = t^2 e^{-2t}$ — модулирующая функция; $U_1, U_2, \varphi_1, \varphi_2$ — случайные величины, постоянные во время измерения, но медленно меняющиеся от измерения к измерению. Требуется оценить τ. Постараемся исключить влияние мешающих параметров U_i, φ_i $(i = 1, 2)$. Запишем, используя преобразование Гильберта, выражение для квадрата огибающей сигнала

$$A^2(t) = U_1^2 a^2(t) + U_2^2 a^2(t - \tau) +$$
$$+ 2U_1 U_2 a(t) a(t - \tau) \cos(\omega_0 \tau + \varphi_1 - \varphi_2).$$

Мгновенное значение фазы $s(t)$

$$\psi(t) =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{U_1 a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + U_2 a(t-\tau) \sin[\omega_0(t-\tau) + \varphi_2]}{s(t)},$$

откуда мгновенное значение частоты

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\omega_0 A^2(t) + U_1 U_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_1 - \varphi_2) \times \times [\dot{a}(t)\, a(t-\tau) - a(t)\, \dot{a}(t-\tau)]}{A^2 t}.$$

Из последнего выражения получим

$$x(t) = A^2(t)[\dot{\psi}(t) - \omega_0] = c_0(\dot{a}a_\tau - a\dot{a}_\tau), \text{ где}$$

$$c_0 = U_1 U_2 \sin(\omega_0 \tau + \varphi_1 - \varphi_2); \quad a = a(t); \quad a_\tau = a(t-\tau).$$

Все мешающие параметры являются составляющими случайной амплитуды c_0 сигнала $x(t)$. Чтобы добиться инвариантности к изменениям мешающих параметров, достаточно в качестве фазовых координат выбрать отношение двух линейных преобразований процесса $x(t)$. Выбираем такие преобразования в виде

$$Y = 4 + \frac{d}{dt}[\ln x(t)] = \frac{\dot{x} + 4x}{x};$$

$$Z = 4 + \frac{d}{dt}(\ln[Yx(t)]) = \frac{\ddot{x} + 8x + 16}{\dot{x} + 4x}.$$

Так как $x(t) = ct(t-\tau)e^{-4t}$; $c = -2c_0\tau e^{2\tau}$, то окончательно получим

$$Y = (2t - \tau)/[t(t-\tau)]; \quad Z = 2/(2t - \tau).$$

Следовательно, значения фазовых координат Y, Z зависят только от t и τ и фазовое изображение инвариантно к неизвестным параметрам $\Delta\psi$ и $\gamma = U_2/U_1$.

Уравнение фазового отображения

$$Y = 8Z/(4 - \tau^2 Z^2); \quad Y = 0; \quad 0 \leqslant Z \leqslant 2/\tau.$$

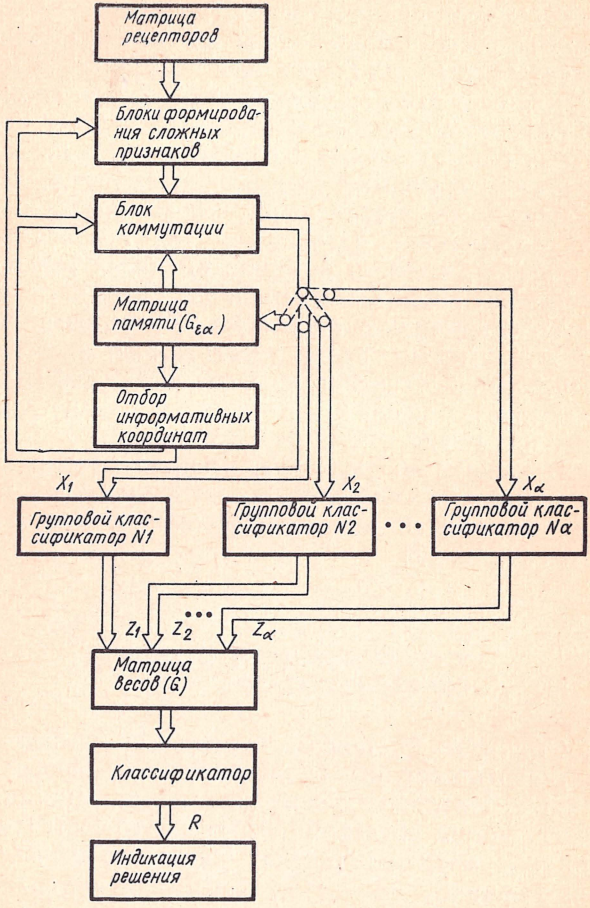


Рис. 32. Блок-схема распознающего автомата при групповом методе обучения.

Схема преобразований сигнала $s(t)$ показана на рис. 32. Характерной особенностью рассмотренного алгоритма распознавания является использование однотипных операций (умножение на матрицу H или $H_э$ и G) на всех этапах решения задачи. Действительно, на этапе формирования сложных признаков, инвариантных к определенным возмущениям входа, используется преобразование Адамара или его логическая модификация, на этапе отбора информативных признаков — умножение на матрицу $H_э$, полученную из матрицы Адамара, и на этапе принятия решения — на матрицу весов G. Однотипность операций обусловливает однородность структуры РА, что очень ценно, так как наиболее полно удовлетворяет требованиям интегральной технологии, считающейся сейчас наиболее прогрессивной при производстве радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) на интегральных и больших интегральных микросхемах. Вопросы аппаратурной реализации подобных РА с использованием новейших достижений микроэлектроники освещены в работах [2, 16, 21].

3. ГРУППОВОЙ МЕТОД ОБУЧЕНИЯ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ

Структура $H_э$ такова, что каждый столбец содержит одинаковое число элементов со значением +1 и —1. Это является основанием для разработки группового метода обучения [20]. Идея его состоит в том, что информация об объектах (сигналах) записывается в n матриц $G_{\Sigma\alpha}$ ($\alpha = \overline{1, n}$), каждая из которых имеет размерность $2 \times L$ и образуется элементами

$$g_{ij} = (2n_{ij}^{+} - 0{,}5m\xi)/0{,}5m\xi, \quad i = 1, 2; \quad j = \overline{1, L}.$$

Здесь n_{ij}^{+} — число $+1$, образовавшихся на j-м выходе блока формирования признаков при предъявлении в процессе обучения распознающему устройству $0{,}5\ m\xi$ объектов i-й группы; ξ — полное число объектов в каждом классе; m — число классов.

Объединение объектов в группы при обучении производится в соответствии со структурой $H_э$. Например, для $H_э$ вида 8×7

$$H_э = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

и $\alpha = 1$ (т. е. рассматривается первый столбец) в матрице (4.5) в первую группу войдут объекты 1,3, 5, 7, а во вторую — 2, 4, 6, 8 классов. Соответственно для этого же случая, но для $\alpha = 7$ (предпоследний столбец), в первую группу войдут объекты 1, 4, 6, 7, во вторую — 2, 3, 5, 8 классов.

Матрица отбора при групповом обучении строится с использованием простейшей матрицы

$$H_{э(2\times1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Процесс отбора должен быть повторен для каждой из матриц $G_{\Sigma\alpha}$

$$\Phi_\alpha = H^T_{э(2\times1)} G_{\Sigma\alpha}.$$

Критерий для отбора тот же: $\sup\limits_i |\varphi_{ij}^{\alpha}|$, $i = 1$; $j = \overline{1, L}$.

Отбор можно повторять, считая каждый раз исключенными элементами отмеченные как наибольшие в предыдущем шаге. При этом для останова можно руководствоваться соотношением $\delta = 2 - |\varphi_{ij}^{\alpha}| \leqslant \delta_{max}$, где δ — допустимое отклонение от идеального сходства столбцов $G_{\Sigma\alpha}$ со столбцом $H_{э(2\times1)}$, а δ_{max} — заданное максимальное допустимое отклонение. Отмеченные элементы расположим в порядке их убывания (по величине) $\varphi_{1q}^{\alpha}, \varphi_{1r}^{\alpha}, \varphi_{1c}^{\alpha}, \ldots, \varphi_{1s}^{\alpha}$. Значения индексов $q, r, c, \ldots, s$ указывают на номера информативных разрядов L-мерного вектора признаков и из них формируется матрица весов

$$G_{\alpha} = \begin{bmatrix} g_{Iq} & g_{Ir} & g_{Ic} & \ldots & g_{Is} \\ g_{IIq} & g_{IIr} & g_{IIc} & \ldots & g_{IIs} \end{bmatrix}.$$

Решение за номером α об отнесении предъявленного объекта к первой или ко второй группе формируется подачей на групповой классификатор сигнала (информативных разрядов):

$$X_{\alpha} = \{x_q, x_r, x_c, \ldots, x_s\} \tag{4.6}$$

или

$$R_{\alpha} = G_{\alpha}X_{\alpha}^{T} - \frac{1}{2}G_{\alpha}^{0} = \begin{vmatrix} R_1^{\alpha} \\ R_2^{\alpha} \end{vmatrix},$$

где G_{α}^{0} матрица-столбец, образованная из диагональных элементов матрицы $G_{\alpha}^{*} = G_{\alpha}G_{\alpha}^{T}$.

Выход детектора наибольшего напряжения группового классификатора

$$z_{\alpha} = \begin{cases} +1, & \text{если } R_1^{\alpha} > R_2^{\alpha}, \\ -1, & \text{если } R_1^{\alpha} < R_2^{\alpha}. \end{cases}$$

Этот выход можно рассматривать как сложный признак. Совокупность сложных признаков образует вектор $Z = \{z_{\alpha}\}$ $(\alpha = \overline{1, n})$, информация о котором

может быть записана в виде матрицы

$$G_z = \{g^z_{i\alpha}\} = \left\{\frac{2n^+_{i\alpha} - \xi}{\xi}\right\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \alpha = \overline{1, n},$$

n^+_{ij} — число +1, образовавшихся на выходе детектора наибольшего напряжения группового классификатора под номером α при предъявлении автомату ξ объектов i-го класса. Окончательное решение об отнесении объекта к классу принимается в соответствии с расположением элемента с наибольшим значением у вектора

$$R = G_z z^T - \frac{1}{2} G^0_z = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_m \end{bmatrix}.$$

Блок-схема структуры РА для этого варианта показана на рис. 32. Хотя в этом варианте процесс обучения РА значительно больше по времени, тем не менее такое построение РА имеет преимущества, главными из которых являются следующие:

значительная экономия элементов памяти, так как матрица памяти РА должна здесь иметь размерность $2 \times L$, а не $m \times L$;

задача на распознавание m классов здесь расчленилась на n параллельно решаемых альтернативных задач, для решения которых разработаны весьма эффективные методы классификации.

Поясним последнее с помощью частного примера. Вектор X_α можно преобразовать в линейную дискриминантную функцию. Для этого необходимо провести многомерный дисперсионный анализ над выборкой, относящейся к первой X^{I}_α и ко второй X^{II}_α группам. Схема анализа такова. Определяются функции

$$W_{ii} = \sum_{j=1}^{0,5m_\xi} (x^{\mathrm{I}}_{ji})^2 + \sum_{j=1}^{0,5m_\xi} (x^{\mathrm{II}}_{ji})^2 -$$

$$-\left[\left(\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{ji}^{\mathrm{I}}\right)^2-\left(\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{ji}^{\mathrm{II}}\right)^2\right]/(0,5m\xi),$$

$$i=q,\ r,\ c,\ \ldots,\ s\ [\text{см. } (4.6)];$$

$$W_{ik}=\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{ji}^{\mathrm{I}}x_{jk}^{\mathrm{I}}+\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{ji}^{\mathrm{II}}x_{jk}^{\mathrm{II}}-$$

$$-\left[\left(\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{ji}^{\mathrm{I}}\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{jk}^{\mathrm{I}}+\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{ji}^{\mathrm{II}}\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{jk}^{\mathrm{II}}\right)/(0,5m\xi)\right],$$

$$i\neq k;\quad i,\ k=q,\ r,\ c,\ \ldots,\ s.$$

Затем определяются расстояния

$$d_i=\left(\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{ji}^{\mathrm{I}}-\sum_{j=1}^{0,5m\xi} x_{ji}^{\mathrm{II}}\right)/(0,5m\xi),$$

$$\text{где}\quad i=q,\ r,\ c,\ \ldots,\ s,$$

а 1, 2 — по-прежнему, номера групп объектов.

Далее решается система уравнений относительно неизвестных весов λ_i. В матричном виде эта система записывается следующим образом:

$$W\Lambda=D, \tag{4.7}$$

где $W=\{W_{ij}\}$; $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_q\\ \lambda_r\\ \vdots\\ \lambda_s\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}d_q\\ d_r\\ \vdots\\ d_s\end{bmatrix}$.

Линейная дискриминантная решающая функция строится на основе данных решения (4.7) и выбора некоторого порога для y_α: $R_\alpha = X_\alpha\Lambda$ Если $R_\alpha \geqslant y_\alpha$, то объект относят к первой группе, если $R_\alpha < y_\alpha$ — то ко второй. Решающим устройством здесь может быть обычный пороговый элемент. Его выход следует рассматривать как некоторый информативный признак.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Адаптивные** системы идентификации. Под ред. В. И. Костюка. Киев, «Техніка», 1975. 284 с.

2. **Александров В. В., Полонников Р. И., Трофимов Е. И.** Оптоэлектронное устройство распознавания образов.— В кн.: Оптическая и электрооптическая обработка информации. М., «Наука», 1971, с. 66—71.

3. **Брюс Р.** Цифровая обработка сигналов.— «Зарубежная радиоэлектроника», 1971, № 12, с. 18—31.

4. **Голд Б., Рейдер Ч.** Цифровая обработка сигналов. М., «Сов. радио», 1973. 367 с.

5. **Гольденберг Л. М., Левчук Ю. П., Поляк М. Н.** Цифровые фильтры. М., «Связь», 1974 160 с.

6. **Гусев В. Д.** Процедуры быстрого преобразования Фурье и Уолша.— В кн.: Вычислительные системы. Под ред. Н. Г. Загоруйко. Вып. 45. Новосибирск, «Наука», 1971, с. 107—116.

7. **Зеленский К. Х.** Упрощение моделей, идентифицирующих объекты с распределенными параметрами.— «Вестн. КПИ. Сер. Автоматика и электроприборостроение». Киев, Изд-во КГУ, 1974, № 11, с. 18—21.

8. **Клейбанов С. Б** Стабилизация коэффициентов в дискретном фильтре Калмана.— «Автоматика и телемеханика», 1974, № 3, с. 76—82.

9. **Котельников В. А**. Теория потенциальной помехоустойчивости. М., Госэнергоиздат, 1956.

10. **Краскевич В. Е., Корбич Ю. С.** Дискретный фильтр Калмана для систем с распределенными параметрами.— «Вестн. КПИ. Сер. Автоматика и электроприборостроение». Киев, Изд-во КГУ, 1975, № 12, с. 79—81.

11. **Крутько П. Д.** Оптимальная фильтрация в дискретных автоматических системах.— «Автоматика и вычислительная техника», 1970, № 4, с. 39—41.

12. **Основы** разделений и измерения сигналов по структурным свойствам. Под ред. А. М. Заездного. М. Изд-во М-ва связи СССР, 1971. 123 с.

13. **Пирл Г.** Обработка случайных сигналов функциями Уолша.— «Зарубежная радиоэлектроника», 1972, № 8, с. 42—50.

14. **Полонников Р. И.** Адаптивные однородные структуры для распознавания сигналов.— В кн.: Адаптивные системы автоматического управления. Вып. 1. Киев, «Техніка», 1973, с. 23—31.

15. **Полонников Р. И.** Быстродействующий распознающий автомат.— В кн.: Автоматическое управление и регулирование в различных отраслях народного хозяйства. Вып. 1. Куйбышев, изд. МВ и ССО РСФСР, 1971, с. 39—47.

16. **Полонников Р. И.** Логическое преобразование сигнала рецепторного поля, инвариантное к некоторым его возмущениям.— «Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехн.», 1973, вып. 5, с. 84—95.

17. **Полонников Р. И., Александров В. В.** Некоторые методы выделения информативных параметров и их применение в адаптивных системах.— В кн.: Теория и применение адаптивных систем. Алма-Ата, Изд-во Каз. ПИ, 1971.

18. **Полонников Р. И., Александров В. В.** Об одном способе решения задач опознания объектов.— «Известия АН СССР. Сер. Техническая кибернетика», 1967, № 1, с. 92—102.

19. **Полонников Р. И., Александров В. В.** Обучаемые классификаторы и устройства опознавания, использующие симплексные коды.— «Вопросы радиоэлектроники. Сер. общетехн.», 1971, вып. 19, с. 56—66.

20. **Полонников Р. И., Александров В. В.** Обучаемый распознающий автомат на основе адаптивных матричных структур.— В кн.: Технические средства для адаптивной переработки информации и аналоговые запоминающие устройства. Труды ин-та электронных управляющих машин. М., «Наука», 1969, с. 35.

21. **Полонников Р. И., Трофимов Е. И.** Применение методов теории чувствительности при разработке устройств классификации, выполненных на основе бескорпусных оптоэлектронных элементов.— В кн.: Чувствительность систем управления. Труды Всесоюзной школы-семинара по теории чувствительности систем управления и ее применению. Т. 2. Владивосток, ДВНЦ АН СССР, 1975, с. 204—209.

22. **Романов В. А., Селяран В. А.** Идентификация динамических характеристик многомерных объектов с помощью ортогональных разложений Уолша.— «Автоматика и телемеханика», 1974, № 11, с. 173—178.

23. **Смолов В. Б., Фомичев В. С.** Аналого-цифровые и цифроаналоговые нелинейные вычислительные устройства. Л., «Энергия», 1974. 264 с.

24. **Уинтц П. А.** Кодирование изображений посредством преобразований.— В кн.: Обработка изображений при помощи ЦВМ. М., «Мир», 1973, с. 98—110.

25. **Хемминг Р. В.** Численные методы. М., «Наука», 1972, 400 с.

26. **Andrews H. C., Caspari K. Z.** A Generalized technique for Spectral Analysis. IEEE Irans. Comput., vol. C-19, N 1, 1970, p. 16—25.

27. **Corrington M. S.** Solution of Differentional and Integral Equations with Walsh Functions. IEEE Irans on circuit theory, vol. G. 20, N 5, 1973, p. 470—476.

28. **Good I. T.** The interaction algorithm and practical Fourier Analysis. T. Roy Statigtical Sos (London) vol. B 20, 1959, p. 361.

29. **Kalman R.** New Methods and Results in Lineare Prediction and Fieltering Theory. Res. Tnst. Advanced Studiens. Baltimore. Md. Tech. Rep., 1961, p. 1—61.

30. **Robinson G. S.** Logical Convolution and discrete Walsh and Fourier power Spectra. IEEE Trans. On Audio and Electroacustics, vol. AU-20, N 4, 1972, p. 271—280.

31. **Tzafestas S. G.** On Optimum distributed Parameter Filtering and Fixed-Interval Smoothig for covered Noise. IEEE Trans on Automatic Control, vol. AC-17, 1972, N 4, p. 448—558.

Содержание

Стр.

Предисловие 3

Глава 1. Представление сигналов в прямоугольных ортогональных базисах 5

1. Дискретные функции Уолша и преобразование Адамара 5
2. Факторизация матриц Адамара 9
3. Логическая корреляционная функция и корреляционный анализ в базисе Уолша . . . 17
4. Ортогональное разложение сигналов в базисе Хаара 34

Глава 2. Обработка сигналов с использованием функций Уолша 39

1. Решение дифференциальных и интегральных уравнений с применением функций Уолша 39
2. Использование преобразований Адамара при решении систем алгебраических уравнений 51

Глава 3. Синтез структуры фильтров 55

1. Цифровая фильтрация сигналов 55
2. Методы упрощения математических моделей цифровых фильтров 62
3. Цифровые фильтры в базисе Уолша . . . 82
4. Адаптивная цифровая фильтрация в базисе Хаара 90
5. Анализ нелинейных систем в базисе Уолша 98
6. Фильтр Калмана в системах с распределенными параметрами 106

Глава 4. Распознавание сигналов на основе преобразований Адамара 119

1. Оптимальные равноудаленные сигналы 119
2. Алгоритм распознавания сигналов 122
3. Групповой метод обучения при распознавании 128

Список литературы 133

Револьд Иванович Полонников, канд. техн. наук
Всеволод Иванович Костюк, д-р техн. наук
Валерий Евгеньевич Краскевич, канд. техн. наук

Матричные методы обработки сигналов

Редактор издательства *Л. О. Полянская*
Оформление художников *В. А. Потиевского, А. А. Шурховецкого*
Художественные редакторы *Е. А. Ильницкий, В. С. Шапошников*
Технический редактор *Л. И. Левочкина*
Корректор *Г. Г. Бондарчук*

ИБ № 441

Сдано в набор 22. 11. 1976 г. Подписано в печать 25. 03. 1977 г. Формат 70×100 1/32. Бумага типогр. № 3. Усл. печ. л. 5,48. Уч.-изд. л. 5,22. Тираж 4500 экз. БФ 02918. Зак. № 7—1403. Цена 32 коп.

Издательство «Техника», 252601, Киев, 1, ГСП, Пушкинская, 28.

Отпечатано с матриц головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Киев, ул. Довженко, 3 на Киевской фабрике печатной рекламы, Киев, Выборгская, 84.

32 коп.